آزمون (۱) نوبت اول

آیا گزارهٔ «مجموع دو عدد فرد، عددی زوج است» درست است؟ در صورت درستی، آن را ثابت کنید. (فصل اول)

اگر $a \mid bc$ آنگاه آیا می‌توان نتیجه گرفت که a حداقل یکی از دو عدد b و c را عاد می‌کند؟ (فصل اول)

می‌دانیم $\sqrt{۲}$ گنگ است. با استفاده از برهان خلف ثابت کنید $\sqrt[۳]{۱+\sqrt{۲}}$ نیز گنگ است. (فصل اول)

با استفاده از استدلال بازگشتی ثابت کنید: حاصل ضرب هر دو عدد حقیقی کوچک‌تر یا مساوی نصف مجموع مربع‌های آن‌ها است. (فصل اول)

با استفاده از تعریف عاد کردن و تقسیم اعداد توان‌دار با پایه‌های برابر، ابتدا نشان دهید $۳^۵ \mid ۳^۹$ و سپس ثابت کنید: (فصل اول)

$$\forall m,n \in \mathbb{N}, m \le n \Rightarrow a^m \mid a^n$$

ثابت کنید: اگر $a \mid b$ آنگاه $(a,b) = |a|$. (فصل اول)

اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم اعداد A و B بر ۳۹ به ترتیب ۱۷ و ۲۳ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم $A - B$ بر ۳۹ را محاسبه کنید. (فصل اول)

جواب‌های عمومی معادلهٔ $۴x \overset{۵}{\equiv} ۱۷$ را به‌دست آورید. (فصل اول)

اگر دو عدد $(۳a - ۵)$ و $(۴a - ۷)$ رقم یکان برابر داشته باشند، رقم یکان عدد $(۹a + ۶)$ را به‌دست آورید. (فصل اول)

باقی‌ماندهٔ تقسیم $۴^{۳۱} + ۳^{۳۱} + ۲^{۳۱}$ را بر ۷ به‌دست آورید. (فصل اول)

یک گراف ۴- منتظم از مرتبهٔ ۶ رسم کنید. (فصل دوم)

گراف کاملی دارای ۲۱ یال است. درجهٔ هر رأس آن را به‌دست آورید. (فصل دوم)

اگر به گراف ۴- منتظم، ۱۲ یال اضافه شود، گراف کامل می‌شود. مرتبه و اندازهٔ گراف را مشخص کنید. (فصل دوم)

آزمـــــــون (۲) نـوبت اول

ثابت کنید حاصل‌ضرب دو عدد متوالی زوج است.

(فصل اول)

آیا از رابطهٔ $a \mid b \pm c$، همواره می‌توان نتیجه گرفت $a \mid c$ یا $b \mid c$؟

(فصل اول)

اگر a و b دو عدد حقیقی باشند، با استفاده از اثبات بازگشتی ثابت کنید: $۲a^۲ + b^۲ + ۱ \geq ۲(a - ba)$

(فصل اول)

اگر $a \neq ۰$ عددی صحیح و دو عدد $(۷m + ۶)$ و $(۶m + ۵)$ بر a بخش‌پذیر باشند، ثابت کنید $a = \pm ۱$.

(فصل اول)

اگر p عددی اول باشد و $a \in \mathbb{Z}$ و $p \nmid a$ ثابت کنید: $(p, a) = ۱$.

(فصل اول)

اگر در یک تقسیم، مقسوم و مقسوم‌علیه هر دو بر عدد صحیح n بخش‌پذیر باشند، ثابت کنید باقی‌ماندهٔ تقسیم نیز همواره بر n بخش‌پذیر است.

(فصل اول)

همهٔ اعداد صحیحی را بیابید که سه برابر آن‌ها منهای ۱۳، بر ۷ بخش‌پذیر باشد.

(فصل اول)

باقی‌ماندهٔ تقسیم $A = ۱! + ۲! + ۳! + ... + ۵۰۰!$ را بر ۱۰ به‌دست آورید.

(فصل اول)

باقی‌ماندهٔ تقسیم $۲^{۵۰۰}$ بر ۱۳ را به‌دست آورید.

(فصل اول)

یک گراف ۳- منتظم از مرتبهٔ ۷ رسم کنید.

(فصل دوم)

گراف سادهٔ $G = (V, E)$ گرافی ۳- منتظم است. با افزودن ۶ یال به یال‌های این گراف، گرافی کامل به‌دست می‌آید.

(فصل دوم)

الف) ویژگی گراف G را مشخص کنید. (مرتبه و اندازه)

ب) این گراف را رسم کنید.

گراف G با مجموعه رأس‌های $V(G) = \{a, b, c, d, e, f\}$ و مجموعهٔ یال‌های $E(G) = \{ab, ac, cd, ef, db, cf, be\}$ مفروض است آن را رسم کنید و به موارد زیر پاسخ دهید.

(فصل دوم)

الف) مرتبه و اندازهٔ گراف G را بنویسید.

ب) درجهٔ رأس‌های گراف G را مشخص کنید.

پ) کدام رأس‌های گراف G با رأس f مجاورند؟

ت) مجموع درجات رئوس این گراف برابر چند است؟

ثابت کنید: مربع هر عدد فرد به صورت $(8t+1)$ است. $(t \in \mathbb{Z})$. **(فصل اول)**

آیا از رابطهٔ $a^n \overset{m}{\equiv} b^n$ می‌توان نتیجه گرفت $a \overset{m}{\equiv} b$ است؟ چرا؟ **(فصل اول)**

اگر α و β دو عدد گنگ باشند؛ ولی $\alpha + \beta$ گویا باشد، ثابت کنید $\alpha + 2\beta$ عددی گنگ است. **(فصل اول)**

اگر x و y دو عدد حقیقی باشند، با استفاده از اثبات بازگشتی ثابت کنید: $x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y$ **(فصل اول)**

اگر $a \mid b$ نشان دهید که $a^n \mid b^n$. **(فصل اول)**

ثابت کنید هر دو عدد صحیح و متوالی نسبت به هم اول هستند. **(فصل اول)**

تیراندازی به سمت یک هدف شامل دو دایرهٔ هم‌مرکز تیراندازی می‌کند. اگر به دایره با شعاع کوچک‌تر بزند، ۵ امتیاز و اگر به دایره با شعاع بزرگ‌تر بزند، ۳ امتیاز می‌گیرد. اگر او کمتر از ۱۵ تیر، تیراندازی کرده باشد و همهٔ تیرها داخل دایرهٔ بزرگ‌تر اصابت نکرده باشد و در پایان ۴۲ امتیاز گرفته باشد، چند حالت برای او در تیراندازی می‌تواند ثبت شود؟ **(فصل اول)**

باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد 2^{121} را بر عدد ۳۱ پیدا کنید. **(فصل اول)**

بیست و هفتم اردیبهشت روز سه‌شنبه است. سومین شنبه در ماه اردیبهشت کدام روز این ماه است؟ **(فصل اول)**

به ازای چه مقداری از عدد طبیعی n رابطهٔ $2n + 1 \mid 2n^2 - 3n + 3$ برقرار است؟ **(فصل اول)**

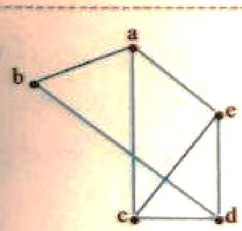
یک گراف ۴ رأسی غیرتهی k- منتظم بکشید که: **(فصل دوم)**

الف) k بیش‌ترین مقدار ممکن را داشته باشد.

ب) k کم‌ترین مقدار ممکن را داشته باشد.

اگر G گرافی ۴- منتظم باشد و $q = 3p - 5$، حاصل $p + q$ را به‌دست آورید. **(فصل دوم)**

در گراف شکل مقابل چند مسیر به طول ۳ از a به e وجود دارد؟ **(فصل دوم)**



اگر n عددی طبیعی و زوج باشد، ثابت کنید $n^3 - 4n$ بر ۴۸ بخش‌پذیر است. (فصل اول)

اگر $ac \overset{m}{\equiv} bc$ باشد، آیا می‌توان نتیجه گرفت $a \overset{m}{\equiv} b$ ؟ چرا؟ (فصل اول)

اگر α و β دو عدد گنگ باشند؛ ولی $\alpha + \beta$ گویا باشد، ثابت کنید $\alpha - \beta$ گنگ است؟ (فصل اول)

اگر a و b دو عدد حقیقی و مثبت باشند، با استفاده از اثبات بازگشتی ثابت کنید: $\sqrt{a} + \sqrt{b} \geq \sqrt{a+b}$ (فصل اول)

اگر $a \mid b$ و $c \mid d$ نشان دهید که $ac \mid bd$. (فصل اول)

اگر در یک تقسیم ۹۰ واحد به مقسوم و ۴ واحد به مقسوم‌علیه اضافه کنیم، خارج قسمت ثابت مانده و از باقی‌مانده، **۲ واحد کم می‌شود.** خارج قسمت را به‌دست آورید. (فصل اول)

اگر اول مهرماه در یک سال روز یک‌شنبه باشد، ۷ اسفند ماه در همان سال چه روزی از هفته است؟ (فصل اول)

رقم یکان 7^{327} را محاسبه کنید. (فصل اول)

به چند طریق می‌توان ۳۵۰ ریال را به وسیلهٔ سکه‌های ۲۰ و ۵۰ ریالی پرداخت که از هر دو سکه استفاده شود؟ (فصل اول)

در یک گراف از مرتبهٔ ۱۰ و اندازهٔ ۱۰، حداکثر چند رأس درجهٔ ۱ خواهیم داشت؟ (فصل اول)

باقی‌ماندهٔ عدد $A = (1000)^{13} \times 12 + 10$ را بر ۷ به‌دست آورید. (فصل اول)

گراف سادهٔ G، ۴- منتظم از مرتبهٔ p و اندازهٔ q می‌باشد، به طوری که $p + q = 21$ است. (فصل دوم)

الف) p و q را محاسبه کنید.

ب) این گراف را رسم کنید.

اگر p و q مرتبه و اندازهٔ یک گراف ۴- منتظم باشند و رابطهٔ $5p^2 - 2q = 100$ بین مرتبه و اندازه آن برقرار باشد، **این گراف چند رأس** دارد؟ (فصل دوم)

آزمـــــــون (۵) نـوبت اول

ثابت کنید حاصل‌ضرب سه عدد متوالی همراه بر ۳ بخش‌پذیر است. **(فصل اول)**

اگر a و b دو عدد حقیقی باشند، با استفاده از استدلال بازگشتی، درستی رابطهٔ روبه‌رو را بررسی کنید: $a^2+1 \geq b(2-b)$ **(فصل اول)**

اگر $a \mid b$ و $a \mid c$، نشان دهید $a \mid mb \pm nc$. **(فصل اول)**

ثابت کنید اگر n عدد صحیح و n^2 فرد باشد، n نیز فرد است. **(فصل اول)**

اگر $d=(a-5, a^2-6a+3)$ و $a \in \mathbb{Z}$ باشد، آنگاه d را پیدا کنید. **(فصل اول)**

اگر در یک تقسیم ۱۴۰ واحد به مقسوم، اضافه و ۳ واحد از مقسوم‌علیه کم کنیم، از باقی‌مانده، ۷ واحد کم می‌شود و خارج قسمت تغییر نمی‌کند. خارج قسمت را به‌دست آورید. **(فصل اول)**

باقی‌ماندهٔ تقسیم $A = 1!+2!+3!+\ldots+500!$ را بر ۱۰ به‌دست آورید. **(فصل اول)**

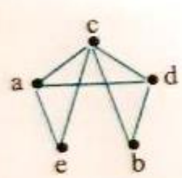
رقم یکان $7^{73}+3^{25}$ را محاسبه کنید. **(فصل اول)**

ثابت کنید هرگاه عددی دو عدد را بشمارد آنگاه مجموع و تفاضل آن دو عدد را نیز می‌شمارد. $(a \mid b, a \mid c \Rightarrow a \mid b \pm c)$ **(فصل اول)**

عدد $\overline{2435a2}$ بر عدد ۱۱ بخش‌پذیر است. a را پیدا کنید. **(فصل اول)**

الف) مسیر در گراف را تعریف کنید. **(فصل دوم)**

ب) یک مسیر به طول ۳ از a به b در گراف مقابل بنویسید.



در گراف ۳– منتظم از مرتبهٔ ۶ ،چند یال اضافه کنیم تا گراف کامل از همین مرتبه به‌دست آید؟ **(فصل دوم)**

ریاضیات گسسته — پاسخ‌نامه آزمون (۱)

۱

بله، دو عدد فرد را $2k+1$ و $2k'+1$ فرض می‌کنیم که داریم:

$$(2k+1)+(2k'+1)=(2k+2k')+2=2\underbrace{(k+k'+1)}_{q}=2q$$

که $2q$، عددی زوج است.

۲

خیر، زیرا به عنوان مثال $6 \mid 3\times 4$ ولی $6 \nmid 3$ و $6 \nmid 4$

۳

فرض کنیم $a=\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}$ عددی گویا باشد، پس داریم:

$$1+\sqrt{2}=a^3 \Rightarrow \sqrt{2}=a^3-1$$

با توجه به آنکه a^3-1 عددی گویا است، پس $\sqrt{2}$ نیز گویا است که این خلاف فرض است، پس فرض خلف باطل و حکم ثابت است.

۴

$$xy \le \frac{x^2+y^2}{2} \Leftrightarrow 2xy \le x^2+y^2$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2-2xy \ge 0 \Leftrightarrow (x-y)^2 \ge 0$$

عبارت فوق همواره برقرار است، پس حکم درست است.

۵

$$3^9=3^5\times 3^4 \xrightarrow{q=3^4} 3^5 \mid 3^9$$

$$a^n=a^{n-m}\times a^m \xrightarrow{q=a^{n-m}} a^m \mid a^n$$

۶

$$a \mid b \Rightarrow |a| \mid b$$

$$a \mid a \Rightarrow |a| \mid a$$

اگر برای هر $m>0$ داشته باشیم $m \mid a$ و $m \mid b$ در این صورت خواهیم داشت:

$$m \mid a \Rightarrow |m| \le |a| \xrightarrow{m>0} m \le |a|$$

۷

$$\left.\begin{array}{l} A=39q+17 \\ B=39q'+23 \end{array}\right\} \Rightarrow A-B=39(q-q')-6=39(q-q'-1+1)-6$$

$$\Rightarrow A-B=39\underbrace{(q-q'-1)}_{q''}+33 \Rightarrow A-B=39q''+33$$

$\Rightarrow$ (باقی مانده) $= r = 33$

۸

$$4x \overset{5}{\equiv} 17 \Rightarrow 4x \overset{5}{\equiv} 2$$

$$\Rightarrow 4x \overset{5}{\equiv} 2\times 5+2 \overset{5}{\equiv} 12 \xrightarrow{\div 4} x \overset{\frac{5}{(5,4)}}{\equiv} 3 \Rightarrow x=5k+3$$

۹

$$3a-5 \overset{10}{\equiv} 4a-7 \Rightarrow -5+7 \overset{10}{\equiv} 4a-3a$$

$$\Rightarrow a \overset{10}{\equiv} 2 \xrightarrow{\times 9} 9a \overset{10}{\equiv} 18 \Rightarrow 9a+6 \overset{10}{\equiv} 24 \;,\; 24 \overset{10}{\equiv} 4$$

$$\Rightarrow 9a+6 \overset{10}{\equiv} 4 \Rightarrow r=4$$

۱۰

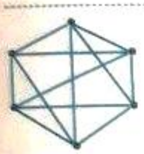
$$2^6 \overset{7}{\equiv} 1 \Rightarrow (2^6)^5 \overset{7}{\equiv} (1)^5 \Rightarrow 2^{30} \overset{7}{\equiv} 1 \xrightarrow{\times 2} 2^{31} \overset{7}{\equiv} 2$$

$$3^3 \overset{7}{\equiv} 6 \overset{7}{\equiv} -1 \Rightarrow (3^3)^{10} \overset{7}{\equiv} (-1)^{10} \xrightarrow{\times 3} 3^{31} \overset{7}{\equiv} 3$$

$$4^3 \overset{7}{\equiv} 1 \Rightarrow (4^3)^{10} \overset{7}{\equiv} (1)^{10} \xrightarrow{\times 4} 4^{31} \overset{7}{\equiv} 4$$

$$2^{31}+3^{31}+4^{31} \overset{7}{\equiv} 2+3+4 \overset{7}{\equiv} 2$$

۱۱



۱۲

$$\binom{p}{2}=21 \Rightarrow \frac{p(p-1)}{2}=21 \Rightarrow p(p-1)=42 \Rightarrow p=7$$

پس درجه هر رأس گراف ۶ است.

۱۳

$$4p=2q \Rightarrow q=2p$$

$$q+12=\binom{p}{2} \Rightarrow 2p+12=\frac{p(p-1)}{2} \Rightarrow p^2-5p-24=0$$

$$\Rightarrow (p-8)(p+3)=0 \Rightarrow p=8 \Rightarrow q=16$$

ریاضیات گسسته — پاسخ‌نامه آزمون (۲)

۱

الف) اگر a زوج باشد $(a=2k)$، عدد بعدی $a+1=2k+1$ خواهد بود، پس داریم:

$$a(a+1)=2\underbrace{k(2k+1)}_{q} \Rightarrow 2 \mid a(a+1)$$

ب) اگر a فرد باشد $(a=2k+1)$، عدد بعدی $a+1=2k+2$ است و داریم:

$$a(a+1)=(2k+1)(2k+2)=2\underbrace{(2k+1)(k+1)}_{q} \Rightarrow 2 \mid a(a+1)$$

بنابراین حاصل‌ضرب هر دو عدد متوالی زوج است.

۲

خیر به عنوان مثال $7 \mid 3+4$ ولی $7 \nmid 3$ و $7 \nmid 4$ و یا $12 \mid 15-3$ ولی $12 \nmid 3$ و $12 \nmid 15$.

۳

$$2a^2+b^2+1 \geq 2(a-ba) \Leftrightarrow a^2+a^2+b^2+1-2a+2ba \geq 0$$
$$\Leftrightarrow (a-1)^2+(a+b)^2 \geq 0$$

چون رابطهٔ فوق همواره برقرار است، پس حکم درست است.

۴

$$a \mid 7m+6 \overset{\times 6}{\Rightarrow} a \mid 42m+36$$
$$a \mid 6m+5 \overset{\times 7}{\Rightarrow} a \mid 42m+35$$
$$\Rightarrow a \mid (42m+36)-(42m+35) \Rightarrow a \mid 1 \Rightarrow a=\pm 1$$

۵

فرض کنیم $(p,a)=d \Rightarrow \begin{cases} d \mid p \xRightarrow{p \text{ اول}} d=1 \text{ یا } d=p \\ d \mid a \end{cases}$

$d=p \xRightarrow{d|a} p \mid a$ (این با فرض $p \nmid a$ تناقض دارد)

$\Rightarrow d=1 \Rightarrow (p,a)=1$

۶

با فرض $a=nk$ و $b=nk'$ داریم:

$$a=bq+r \Rightarrow nk=nk'q+r \Rightarrow nk-nk'q=r$$
$$\Rightarrow r=n\underbrace{(k-k'q)}_{q''} \Rightarrow n \mid r$$

۷

اگر آن عدد را x فرض کنیم، باید $7 \mid 3x-13$ یا $3x \overset{7}{\equiv} 13$ حال داریم:

$$3x \overset{7}{\equiv} 13 \Rightarrow 3x \overset{7}{\equiv} 6 \xRightarrow{\div 3} x \overset{\frac{7}{(7,3)}}{\equiv} 2 \Rightarrow x \overset{7}{\equiv} 2 \Rightarrow x=7k+2$$

۸

از $5!$ به بعد تمامی اعداد بر ۱۰ بخش‌پذیر هستند، پس داریم:

$$\left.\begin{array}{l} 1! \overset{10}{\equiv} 1 \\ 2! \overset{10}{\equiv} 2 \\ 3! \overset{10}{\equiv} 6 \\ 4! \overset{10}{\equiv} 24 \\ 5! \overset{10}{\equiv} 0 \\ \vdots \\ 500! \overset{10}{\equiv} 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 1!+2!+3!+4!+\cdots+500! \overset{10}{\equiv} 1+2+6+24+0+\cdots+0$$

$$\Rightarrow A \overset{10}{\equiv} 33,\ 33 \overset{10}{\equiv} 3 \Rightarrow A \overset{10}{\equiv} 3$$

۹

$$2^6 \overset{13}{\equiv} -1 \Rightarrow (2^6)^{83} \overset{13}{\equiv} (-1)^{83}$$
$$\Rightarrow 2^{498} \overset{13}{\equiv} -1 \xRightarrow{\times 2^2} 2^{500} \overset{13}{\equiv} -4$$
$$\Rightarrow 2^{500} \overset{13}{\equiv} 13-4 \Rightarrow 2^{500} \overset{13}{\equiv} 9$$

۱۰

چنین گرافی وجود ندارد؛ چون ۷ رأس درجه ۳ داریم که امکان‌پذیر نیست؛ چون تعداد رأس‌های درجهٔ فرد، نمی‌تواند عددی فرد باشد.

۱۱

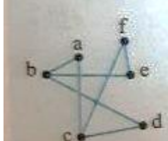
الف)
$$3p=2q \Rightarrow q=\frac{3p}{2}$$
$$\frac{3p}{2}+6=\binom{p}{2} \Rightarrow \frac{3p}{2}+6=\frac{p(p-1)}{2}$$
$$\Rightarrow 3p+12=p^2-p \Rightarrow p^2-4p-12=0$$
$$\Rightarrow (p-6)(p+2)=0 \Rightarrow p=6 \Rightarrow q=9$$

ب)

۱۲

الف) $p=0$ و $q=7$

ب) $\deg(a)=2,\ \deg(b)=3,\ \deg(c)=3,$
$\deg(d)=2,\ \deg(e)=2,\ \deg(f)=2$



پ) e، c با f مجاورند.

ت) مجموعه درجات رئوس $14=2q$ است.

ریاضیات گسسته — پاسخ‌نامه آزمون (۳)

۱

فرض می‌کنیم $a=2k+1$ است، پس داریم:

$$a^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1=4\underbrace{k(k+1)}_{2t}+1=8t+1$$

۲

خیر، زیرا $3^2 \overset{4}{\equiv} 5^2$ است؛ در حالی که $3 \overset{4}{\not\equiv} 5$

۳

فرض خلف: اگر $\alpha+2\beta$ عددی گویا باشد، پس $(\alpha+2\beta)-\beta$ باید گنگ باشد (مجموع یک عدد گنگ و گویا گنگ است)، ولی $(\alpha+2\beta)-\beta=\alpha+\beta$ عددی گویا است، پس فرض خلف باطل و حکم ثابت است.

۴

$$x^2+y^2+1 \geq xy+x+y \Leftrightarrow 2x^2+2y^2+2 \geq 2xy+2x+2y$$
$$\Leftrightarrow x^2+x^2+y^2+y^2+1+1-2xy-2x-2y \geq 0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2+(x-y)^2 \geq 0$$

با توجه به اینکه رابطه همواره درست است، پس حکم درست است.

۵

$a|b \Rightarrow b=aq$

$\Rightarrow b^n=a^nq^n \xrightarrow{q^n=q'} b^n=a^nq' \Rightarrow a^n|b^n$

۶

فرض کنید $d=(m,m+1)$ است، پس داریم

$$\left.\begin{matrix} d|m+1\\ d|m\end{matrix}\right\} \Rightarrow d|(m+1)-m \Rightarrow d|1 \xrightarrow{d>0} d=1$$

۷

اگر x و y را به ترتیب تعداد اصابت‌ها به دایرهٔ کوچک‌تر و بزرگ‌تر فرض کنیم داریم:

$5x+3y=42 \Rightarrow 5x \overset{3}{\equiv} 42 \Rightarrow 2x \overset{3}{\equiv} 0$

$\Rightarrow x \overset{\frac{3}{(3,2)}}{\equiv} 0 \Rightarrow x \overset{3}{\equiv} 0 \Rightarrow x=3k$

$5(3k)+3y=42 \Rightarrow 3y=42-15k \Rightarrow y=14-5k$

$$\left.\begin{matrix} x\ge0 \Rightarrow 3k\ge 0\Rightarrow k\ge0\\ y\ge0\Rightarrow 14-5k\ge0 \Rightarrow k\le \frac{14}{5}\end{matrix}\right\} \Rightarrow 0\le k\le\frac{14}{5}\Rightarrow k=0,1,2$$

$$\Rightarrow \begin{cases}x=0\\y=14\end{cases}, \begin{cases}x=3\\y=9\end{cases}, \begin{cases}x=6\\y=4\end{cases}$$

پس ۳ حالت ثبت می‌شود.

۸

$2^5 \overset{31}{\equiv} 1 \Rightarrow (2^5)^{24} \overset{31}{\equiv} (1)^{24} \Rightarrow 2^{120} \overset{31}{\equiv} 1 \xrightarrow{\times 2} 2^{121} \overset{31}{\equiv} 2$

۹

ابتدا باید ببینیم اول اردیبهشت چند شنبه است که داریم:

$(1\times31+27)-(1\times31+1)=26 \overset{7}{\equiv} 5$

پس باید ۵ روز به قبل بازگردیم؛ بنابراین اول اردیبهشت پنج‌شنبه است، پس اولین شنبه اردیبهشت سوم است، پس سومین شنبه ۱۷ اردیبهشت است.

۱۰

$2n+1|2n^2-3n+3 \quad (1)$

$2n+1|2n+1 \xrightarrow{\times(-n)} 2n+1|-2n^2-n \quad (2)$

$(1),(2) \Rightarrow 2n+1|-4n+3 \quad (3)$

$2n+1|2n+1 \Rightarrow 2n+1|4n+2 \quad (4)$

$(3),(4)\Rightarrow 2n+1|5 \Rightarrow 2n+1=5\Rightarrow 2n=4\Rightarrow n=2$

۱۱

الف) $k=3$

ب) $k=1$

۱۲

$4p=2q\Rightarrow q=2p$

$q=3p-5 \Rightarrow 2p=3p-5\Rightarrow p=5\Rightarrow q=10\Rightarrow p+q=15$

۱۳

دو مسیر abde، acde وجود دارد.

ریاضیات گسسته — پاسخ‌نامه آزمون (۴)

۱

با فرض $n=2k$ داریم:

$n^3-4n=n(n^2-4)=n(n-2)(n+2)$

$=2k(2k-2)(2k+2)$

$=8\underbrace{k(k-1)(k+1)}_{\text{ضرب سه عدد متوالی}}=8(6q)=48q\Rightarrow 48|n^3-n$

۲

خیر به عنوان مثال $34 \overset{8}{\equiv} 10$ است؛ ولی رابطهٔ $17\overset{8}{\equiv}5$ درست نیست.

۳

فرض خلف: اگر $\alpha-\beta$ گویا باشد، پس مجموع 2β، $(\alpha-\beta)$، مجموع یک عدد گویا و گنگ است که باید گنگ باشد؛ ولی $(\alpha-\beta)+2\beta=\alpha+\beta$ است که عددی گویا می‌باشد، پس فرض خلف باطل و حکم ثابت است.

۴

$\sqrt a+\sqrt b\ge\sqrt{a+b} \Leftrightarrow (\sqrt a+\sqrt b)^2\ge(\sqrt{a+b})^2$

$\Leftrightarrow \cancel{a}+\cancel{b}+2\sqrt{ab}\ge \cancel{a}+\cancel{b} \Leftrightarrow 2\sqrt{ab}\ge0$

عبارت فوق همواره برقرار است، پس حکم درست است.

۵

$a|b\Rightarrow b=aq_1$

$c|d\Rightarrow d=cq_2$

$\Rightarrow b\times d=(a\times c)\underbrace{(q_1q_2)}_{q}\Rightarrow bd=ac(q)\Rightarrow ac|bd$

۶

$a=bq+r\Rightarrow a+90=(b+4)q+r-2$

$\xrightarrow{a=bq+r} bq+r+90=bq+4q+r-2$

$\Rightarrow 4q=92\Rightarrow q=23$

۷

روزهای باقی‌مانده تا ۷ اسفند:

$d=29+4\times30+7=156$

$156\overset{7}{\equiv}2 \Rightarrow$ ۷ اسفند سه‌شنبه است

۸

$$7^2 \overset{10}{\equiv} 9 \overset{10}{\equiv} -1 \Rightarrow 7^2 \overset{10}{\equiv} -1 \Rightarrow (7^2)^{163} \overset{10}{\equiv} (-1)^{163}$$

$$\Rightarrow 7^{326} \overset{10}{\equiv} -1 \xrightarrow{\times 7} 7^{327} \overset{10}{\equiv} -7 \Rightarrow 7^{327} \overset{10}{\equiv} 10-7 \Rightarrow 7^{327} \overset{10}{\equiv} 3$$

۹

$$20x + 50y = 350 \Rightarrow 2x + 5y = 35$$

$$\Rightarrow 2x \overset{5}{\equiv} 35 \Rightarrow 2x \overset{5}{\equiv} 0 \Rightarrow x \overset{\frac{5}{(5,2)}}{\equiv} 0 \Rightarrow x \overset{5}{\equiv} 0 \Rightarrow x = 5k$$

$$2(5k) + 5y = 35 \Rightarrow 5y = 35 - 10k \Rightarrow y = 7 - 2k$$

$$\begin{cases} x \geq 1 \Rightarrow 5k \geq 1 \Rightarrow k \geq \frac{1}{5} \\ y \geq 1 \Rightarrow 7 - 2k \geq 1 \Rightarrow k \leq 3 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{5} \leq k \leq 3 \Rightarrow k = 1, 2, 3$$

پس به ۳ طریق انجام‌پذیر است.

۱۰

این گراف به صورت مقابل است که حداکثر دارای ۷ رأس درجهٔ ۱ خواهد بود.

۱۱

$$1000 = 7 \times 142 + 6 \Rightarrow 1000 \overset{7}{\equiv} 6 \ , \ 6 \overset{7}{\equiv} -1 \Rightarrow 1000 \overset{7}{\equiv} -1$$

$$\Rightarrow (1000)^{13} \overset{7}{\equiv} (-1)^{13} \Rightarrow (1000)^{13} \times 12 \overset{7}{\equiv} (-1) \times 12 = -12$$

$$\Rightarrow (1000)^{13} \times 12 + 10 \overset{7}{\equiv} (-12) + 10 = -2 \ , \ -2 \overset{7}{\equiv} 5$$

$$\Rightarrow (1000)^{13} \times 12 + 1 \overset{7}{\equiv} 5 \Rightarrow r = 5$$

۱۲

الف) $4p = 2q$ است، یعنی $q = 2p$ است، پس داریم:

$$p + q = 21 \Rightarrow p + 2p = 21 \Rightarrow p = 7 \Rightarrow q = 14$$

ب)

۱۳

$$4p = 2q \Rightarrow q = 2p$$

$$5p^2 - 20q = 100 \Rightarrow 5p^2 - 40p = 100 \Rightarrow p^2 - 8p - 20 = 0$$

$$(p-10)(p+2) = 0 \Rightarrow p = 10$$

پس گراف دارای ۱۰ رأس است.

ریاضیات گسسته — پاسخ‌نامهٔ آزمون (۵)

۱

فرض کنیم $a-1$، a و $a+1$ سه عدد متوالی باشند، در این صورت داریم:

$1)\ a = 3k \Rightarrow 3 \mid a \Rightarrow 3 \mid (a-1)a(a+1)$

$2)\ a = 3k+1 \Rightarrow a-1 = 3k \Rightarrow 3 \mid a-1 \Rightarrow 3 \mid (a-1)a(a+1)$

$3)\ a = 3k+2 \Rightarrow a+1 = 3k+3 = 3(k+1)$

$\Rightarrow 3 \mid a+1 \Rightarrow 3 \mid (a-1)a(a+1)$

پس در هر سه حالت حاصل‌ضرب سه عدد متوالی بر ۳ بخش‌پذیر است.

۲

$$a^2 + 1 \geq b(2-b) \Leftrightarrow a^2 + 1 \geq 2b - b^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2b + 1 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + (b-1)^2 \geq 0$$

عبارت فوق همواره برقرار است، پس حکم درست است.

۳

$$\left.\begin{array}{l} a \mid b \Rightarrow a \mid mb \\ a \mid c \Rightarrow a \mid nc \end{array}\right\} \Rightarrow a \mid mb \pm nc$$

۴

فرض کنیم n زوج باشد. $n = 2k$، چون $n^2 = 2(2k^2)$ و این با فرد بودن n^2 تناقض دارد، پس فرض خلف باطل و حکم ثابت است.

۵

$$d \mid a-5 \Rightarrow d \mid (a-1)(a-5) \Rightarrow d \mid a^2 - 6a + 5$$

$$d \mid a^2 - 6a + 3$$

$$\Rightarrow d \mid (a^2 - 6a + 5) - (a^2 - 6a + 3) \Rightarrow d \mid 2 \Rightarrow d = 1 \text{ یا } d = 2$$

۶

$$a = bq + r \Rightarrow a + 140 = (b-3)q + r - 7$$

$$\xrightarrow{a=bq+r} bq + r + 140 = bq - 3q + r - 7$$

$$\Rightarrow 3q = -147 \Rightarrow q = -49$$

۷

$$\left.\begin{array}{l} 1! \overset{10}{\equiv} 1 \\ 2! \overset{10}{\equiv} 2 \\ 3! \overset{10}{\equiv} 6 \\ 4! \overset{10}{\equiv} 24 \\ 5! \overset{10}{\equiv} 0 \\ \vdots \\ 500! \overset{10}{\equiv} 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 1! + 2! + 3! + 4! + \cdots + 500! \overset{10}{\equiv} 1 + 2 + 6 + 24 + 0 + \cdots + 0$$

$$\Rightarrow A \overset{10}{\equiv} 33 \ , \ 33 \overset{10}{\equiv} 3 \ , \ A \overset{10}{\equiv} 3$$

۸

$$7^2 \overset{10}{\equiv} 9 ,\ 9 \overset{10}{\equiv} -1 \Rightarrow 7^2 \overset{10}{\equiv} -1 \Rightarrow (7^2)^{36} \overset{10}{\equiv} (-1)^{36}$$

$$\Rightarrow 7^{72} \overset{10}{\equiv} 1 \xRightarrow{\times 7} 7^{73} \overset{10}{\equiv} 7 \quad (1)$$

$$3^2 \overset{10}{\equiv} 9 \overset{10}{\equiv} -1 \Rightarrow 3^2 \overset{10}{\equiv} -1$$

$$\Rightarrow (3^2)^{12} \overset{10}{\equiv} (-1)^{12} \Rightarrow 3^{24} \overset{10}{\equiv} 1 \xRightarrow{\times 3} 3^{25} \overset{10}{\equiv} 3 \quad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow 7^{73} + 3^{25} \overset{10}{\equiv} 7 + 3 \overset{10}{\equiv} 10 \overset{10}{\equiv} 0$$

۹

$$\begin{cases} a \mid b \Rightarrow b = aq_1 \\ a \mid c \Rightarrow c = aq_2 \end{cases} \Rightarrow b \pm c = aq_1 \pm aq_2 \Rightarrow b \pm c = a\underbrace{(q_1 \pm q_2)}_{q}$$

$$\Rightarrow b \pm c = aq \Rightarrow a \mid b \pm c$$

۱۰

$$\overline{24352a2} \overset{11}{\equiv} 2 - a + 5 - 3 + 4 - 2 \overset{11}{\equiv} 0 \Rightarrow 6 - a \overset{11}{\equiv} 0$$

$$\Rightarrow a \overset{11}{\equiv} 6 \Rightarrow a = 6$$

۱۱

الف) اگر U و V دو رأس از گراف G باشند، یک مسیر از U به V در G دنباله‌ای از رئوس دوبه‌دو متمایز در G است که از U شروع و به V ختم شود، به طوری که هر دو رأس متوالی این دنباله‌ها در G مجاور باشند.

ب) acdb یک مسیر به طول ۳ از a به b است.

۱۲

$$2 \times 6 = 2q \Rightarrow q = 9$$

$$\binom{6}{2} - 9 = 15 - 9 = 6$$

ریاضیات گسسته — پاسخ‌نامه آزمون (۶)

۱

فرض کنیم n مضربی از ۳ نباشد، (فرض خلف) یعنی $n = 3k + r$ که $r = \{1, 2\}$

$$n^2 = (3k + r)^2 = 9k^2 + 6rk + r^2 = 3(3k^2 + 2kr) + r^2$$

چون $r^2 \neq 0$ و مضرب ۳ نیست، پس n^2 مضرب ۳ نمی‌باشد که خلاف فرض است، پس فرض خلف باطل و حکم ثابت می‌شود.

۲

$$a \mid 108 \quad 9 \mid a \Rightarrow a = 9k$$

$$\Rightarrow 9k \mid 108 \xRightarrow{k \in \mathbb{N}} k = 1, 2, 3, 4, 6, 12$$

پس ۶ مقدار برای a خواهیم داشت.

۳

$$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow m \mid a - b \xRightarrow{n \mid m} n \mid a - b \Rightarrow a \overset{n}{\equiv} b$$

۴

$$3x + 4y = 19 \Rightarrow 3x \overset{4}{\equiv} 19$$

$$\Rightarrow 3x \overset{4}{\equiv} 3 \xRightarrow{\div 3} x \overset{\frac{4}{(4,3)}}{\equiv} 1 \Rightarrow x \overset{4}{\equiv} 1 \Rightarrow x = 4k + 1$$

$$3(4k + 1) + 4y = 19 \Rightarrow 4y = -12k + 16 \Rightarrow y = -3k + 4$$

چون y ، تعداد است، باید بزرگ‌تر مساوی صفر باشد.

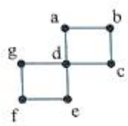
$$\left.\begin{array}{l} y \geq 0 \Rightarrow -3k + 4 \geq 0 \Rightarrow k \leq \frac{4}{3} \\ x \geq 0 \Rightarrow 4k + 1 \geq 0 \Rightarrow k \geq \frac{-1}{4} \end{array}\right. \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k = 0, 1$$

$$k = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 4 \\ x = 1 \end{cases} \quad , \quad k = 1 \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 5 \end{cases}$$

۵

۶

$$n = 7 \ , \ \Delta = 4 \Rightarrow \left\lceil \frac{7}{5} \right\rceil = 2$$

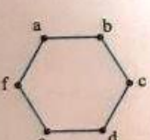


۷

مجموعه احاطه‌گر ۲ عضوی نداریم؛ ولی مجموعه $\{f, d, b\}$ یک مجموعه احاطه‌گر است، پس $\gamma(G) \leq 3$، بنابراین $\gamma(G) = 3$ است.

مجموعه‌های $\{a, b, c, d\}$ و $\{c, d, e, f\}$، ۴ عضوی هستند؛ ولی احاطه‌گر نیستند.

۸



با توجه به شکل روبه‌رو که یک گراف C_6 است $\gamma \geq \left\lceil \frac{6}{2+1} \right\rceil = 2$ خواهد بود و مجموعه‌ای سه عضوی مانند $\{a, d, b\}$ وجود دارد که احاطه‌گر است. در نتیجه $\gamma(G) \leq 3$ خواهد بود، پس $\gamma(G) = 3$ است.

۹

حروف «ت» را در کنار هم قرار می‌دهیم، پس داریم: $\frac{7!}{3!} = 840$

۱۰

این دو مربع متعامد نیستند؛ زیرا در مربع اول درایه‌هایی که عدد ۱ دارند در درایه‌های متناظر با آن‌ها در مربع دوم عدد ۳ وجود دارد.

۱۱

$$x_2 = 0 \Rightarrow x_1 + x_3 + x_4 = 3 \Rightarrow \binom{3 + 3 - 1}{3 - 1} = \binom{5}{2} = 10$$