

ردیف	سؤالات	نمره
۱	در یک تصاعد عددی، مجموع بیست جمله ی اول سه برابر مجموع دوازده جمله ی اول آن است. اگر جمله ی سوم برابر ۶ باشد، جمله ی دهم تصاعد را بدست آورید.	۱,۵
۲	اگر α و β ریشه های معادله ی درجه دوم $x^2 - 2x - 1 = 0$ باشند، معادله ای بنویسید که ریشه های آن $\frac{1}{\alpha+1}$ و $\frac{1}{\beta+1}$ باشد.	۲
۳	نمودار سهمی $y = ax^2 + bx + c$ به صورت زیر است، علامت ضرایب a و b و c و تعداد صفرهای آن را بیابید.	۱
۴	معادله ی $(4 - x^2)^2 - 2(4 - x^2) - 15 = 0$ را حل کنید.	۱,۵
۵	طول سرامیکی از ۳ برابر عرض آن، یک سانتی متر کوتاه تر است. برای سرامیک کردن خانه ای به مساحت ۶۳ متر مربع تعداد ۱۵۰۰ سرامیک مصرف شده است، طول سرامیک چقدر است؟	۱
۶	مهدی و محمد با هم یک اتاق را در ۲ روز رنگ می کنند، در صورتی که هریک به تنهایی اتاق را رنگ کند، مهدی ۳ روز زودتر این کار را انجام می دهد. حساب کنید هرکدام به تنهایی در چند روز این اتاق را رنگ می کند؟	۱
۷	معادله ی مقابل را به روش جبری حل کنید.	۰,۷۵
۸	سه رأس مثلثی $A(-1, -1)$ و $B(2, -3)$ و $C(3, 0)$ هستند. الف) معادله ی ارتفاع وارد بر ضلع BC را بدست آورید. ب) طول ارتفاع وارد بر ضلع BC را بدست آورید.	۱,۲۵
۹	آیا دو تابع $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}+1}$ و $g(x) = \sqrt{x} - 1$ با هم برابرند؟ چرا؟	۱,۲۵
۱۰	به کمک نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ ، نمودار تابع $y = \sqrt{x+2} - 1$ را رسم کنید.	۰,۷۵

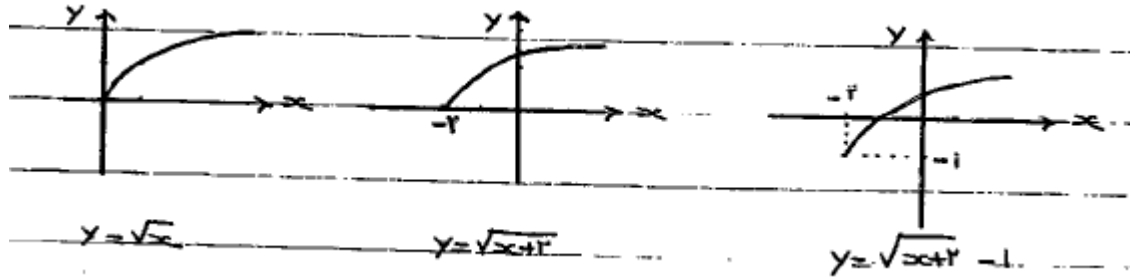
ردیف	ادامه ی سؤالات	محل مهر یا امضاء مدیر	نمره
۱۱	<p>جاهای خالی را با عبارت مناسب تکمیل کنید.</p> <p>الف) مقدار تابع $f(x) = [x + 2]$ به ازای $x = 1 - \sqrt{2}$ برابر است.</p> <p>ب) اگر تابع $f = \{(3, -1), (2, 5)\}$ باشد، $f^{-1} = \dots\dots\dots$ خواهد بود.</p> <p>پ) دامنه ی تابع وارون با تابع، برابر است.</p> <p>ت) اگر $f = \{(3, 2), (-1, 5)\}$ باشد، $f(f^{-1}(2)) = \dots\dots\dots$</p> <p>ث) دامنه ی تابع های $f \cdot g$ و $f \pm g$ برابر است.</p>		۱,۲۵
۱۲	نمودار تابع $y = x + [x]$ را در بازه $[-1, 2]$ رسم کنید.		۱,۵
۱۳	دامنه ی تابع $y = x^2 - 2x + 2$ را طوری محدود کنید تا تابع یک به یک شود، سپس تابع وارون آن را بدست آورید.		۱
۱۴	تابع های $f(x) = \sqrt{x-1}$ و $g(x) = \frac{x+1}{x-2}$ داده شده اند، دامنه و ضابطه ی تابع $f \circ g$ را بدست آورید.		۱,۵
۱۵	اگر $f = \{(0, 2), (1, -1), (3, \frac{1}{4}), (-2, 3), (-1, 1)\}$ و $g = \{(2, \sqrt{2}), (-1, 2), (\frac{1}{4}, 3), (1, \frac{3}{4})\}$ باشد، تابع $gf - g$ را به صورت مجموعه ای از زوج های مرتب بنویسید.		۰,۷۵
۱۶	الف) نمودار دو تابع $y = 2^x$ و $y = (\frac{1}{2})^x$ را رسم کنید. ب) دامنه و برد هریک را بدست آورید. پ) آیا توابع فوق یک به یک هستند؟ چرا؟		۲
صفحه ی ۲ از ۲			

جمع بارم : ۲۰ نمره

ردیف	راهنمای تصحیح	محل مهر یا امضاء مدیر
۱		$\begin{cases} S_{۲۰} = ۲S_{۱۲} \\ a_{۲۰} = ۶ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{۲۰}{۲}(۲a_1 + ۱۹d) = ۲ \times \frac{۱۲}{۲}(۲a_1 + ۱۱d) \\ a_1 + ۲d = ۶ \end{cases}$ $\rightarrow \begin{cases} ۲۰(۲a_1 + ۱۹d) = ۲(۱۲)(۲a_1 + ۱۱d) \\ a_1 + ۲d = ۶ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} ۲۰(2a_1 + 19d) = 2(12)(2a_1 + 11d) \\ a_1 + 2d = 6 \end{cases}$ $\rightarrow \begin{cases} 20(2a_1 + 19d) = 2(12)(2a_1 + 11d) \\ a_1 + 2d = 6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a_1 = -۲ \\ d = ۴ \end{cases} \rightarrow a_{۱۰} = a_1 + ۹d \rightarrow a_{۱۰} = ۳۴$
۲		$x^۲ - ۲x - ۱ = ۰ \rightarrow S = ۲, P = -۱$ $\begin{cases} \alpha' = \frac{۱}{\alpha + ۱} \\ \beta' = \frac{۱}{\beta + ۱} \end{cases}$ $\rightarrow \begin{cases} S' = \alpha' + \beta' = \frac{۱}{\alpha + ۱} + \frac{۱}{\beta + ۱} = \frac{\beta + ۱ + \alpha + ۱}{(\alpha + ۱)(\beta + ۱)} = \frac{\alpha + \beta + ۲}{\alpha\beta + \alpha + \beta + ۱} = \frac{S + ۲}{۱ + S + P} = ۲ \\ P' = \alpha' \times \beta' = \frac{۱}{\alpha + ۱} \times \frac{۱}{\beta + ۱} = \frac{۱}{\alpha\beta + \alpha + \beta + ۱} = \frac{۱}{S + P + ۱} = \frac{۱}{۲ - ۱ + ۱} = \frac{۱}{۲} \end{cases}$ $\rightarrow X^۲ - S'X + P' = ۰ \rightarrow X^۲ - ۲X + \frac{۱}{۲} = ۰$
۳		<p>دارد $max \rightarrow a < ۰$ x رأس منفی $\rightarrow \frac{-b}{۲a} < ۰ \rightarrow b < ۰$ $c > ۰$ عرض از مبدأ مثبت</p> <p>در ضمن تابع ۲ تا صفر دارد.</p>
۴		$۴ - x^۲ = k \rightarrow k^۲ - ۲k - ۱۵ = ۰ \rightarrow (k - ۵)(k + ۳) = ۰ \rightarrow k = ۵, k = -۳$ <p>$k = ۵ \rightarrow ۴ - x^۲ = ۵ \rightarrow x^۲ = -۱ \rightarrow$ غیر قابل قبول</p> <p>$k = -۳ \rightarrow ۴ - x^۲ = -۳ \rightarrow x^۲ = ۷ \rightarrow x = \pm\sqrt{۷}$</p>
۵		<p>طول a و عرض $b \rightarrow \begin{cases} a = ۳b - ۱ \\ a \cdot b = ۴۲۰ \end{cases} \rightarrow ۳b^۲ - b - ۴۲۰ = ۰ \rightarrow \begin{cases} b = ۱۲ \rightarrow a = ۳۵ \\ b = \frac{-۲۵}{۳} \end{cases}$ غیر قابل قبول</p> <p>مساحت هر سرامیک $= \frac{۶۳۰۰۰}{۱۵۰۰} = ۴۲۰$</p>
۶		$\frac{۱}{x} + \frac{۱}{x+۳} = \frac{۱}{۲} \rightarrow ۲x + ۶ + ۲x = x^۲ + ۳x \rightarrow x^۲ - x - ۶ = ۰ \rightarrow (x - ۳)(x + ۲) = ۰$ <p>محمد $x = ۶$, مهدی $x = ۳$, غیر قابل قبول $x = -۲$</p>
۷		$ x = \sqrt{۲+x} \rightarrow x^۲ = ۲+x \rightarrow x^۲ - x - ۲ = ۰ \rightarrow \begin{cases} x = -۱ \\ x = ۲ \end{cases}$ هر دو جواب قابل قبول
۸		<p>$A(-۱, -۱), B(۲, -۳), C(۳, ۰)$</p> <p>الف) $m_{BC} = \frac{۰ - (-۳)}{۳ - ۲} = ۳ \rightarrow m_{AH} = \frac{-۱}{۳} \rightarrow y + ۱ = \frac{-۱}{۳}(x + ۱) \rightarrow y = \frac{-۱}{۳}x - \frac{۴}{۳}$</p> <p>ب) $y - ۰ = ۳(x - ۳) \rightarrow ۳x - y - ۹ = ۰ \rightarrow AH = \frac{ -۳ + ۱ - ۹ }{\sqrt{۹+۱}} = \frac{۱۱}{\sqrt{۱۰}} = \frac{۱۱\sqrt{۱۰}}{۱۰}$</p>
۹		<p>بله زیرا:</p> $f(x) = \frac{x-۱}{\sqrt{x}+۱} \rightarrow D_f = [۰, +\infty)$ $g(x) = \sqrt{x} - ۱ \rightarrow D_g = [۰, +\infty)$ <p>$\rightarrow D_f = D_g = [۰, +\infty)$ شرط</p>

$$f(x) = \frac{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1)}{\sqrt{x} + 1} = \sqrt{x} - 1 \quad \text{شرط ۲}$$

از شرط ۱ و ۲ داریم: $f(x) = g(x)$



۱۰

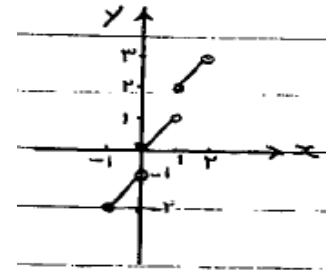
الف) ۱) $f^{-1} = \{(-1, 2), (5, 2)\}$ برد پ) ۲) $D_f \cap D_g$ ت) ۳) ۱۱

$$y = x + [x] \quad x \in [-1, 2)$$

$$-1 \leq x < 0 \rightarrow y = x - 1$$

$$0 \leq x < 1 \rightarrow y = x$$

$$1 \leq x < 2 \rightarrow y = x + 1$$



۱۲

$$y = x^2 - 2x + 2 \rightarrow y = (x - 1)^2 + 1$$

اگر $D_f = (-\infty, 1]$ یا $D_f = [1, +\infty)$ در نظر گرفته شود تابع یک به یک است.

$$y = (x - 1)^2 + 1 \rightarrow D_f = [1, +\infty)$$

$$y - 1 = (x - 1)^2 \rightarrow |x - 1| = \sqrt{y - 1} \rightarrow x - 1 = \sqrt{y - 1} \rightarrow f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{x - 1}$$

۱۳

$$f(x) = \sqrt{x - 1} \quad D_f = [1, +\infty)$$

$$g(x) = \frac{x + 1}{x - 2} \quad D_g = \mathbb{R} - \{2\}$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} - \{2\} \mid \frac{x + 1}{x - 2} \in [1, +\infty)\}$$

$$\frac{x + 1}{x - 2} \geq 1 \rightarrow \frac{3}{x - 2} \geq 0 \rightarrow x > 2 \rightarrow D_{f \circ g} = (2, +\infty), f \circ g(x) = \sqrt{\frac{3}{x - 2}}$$

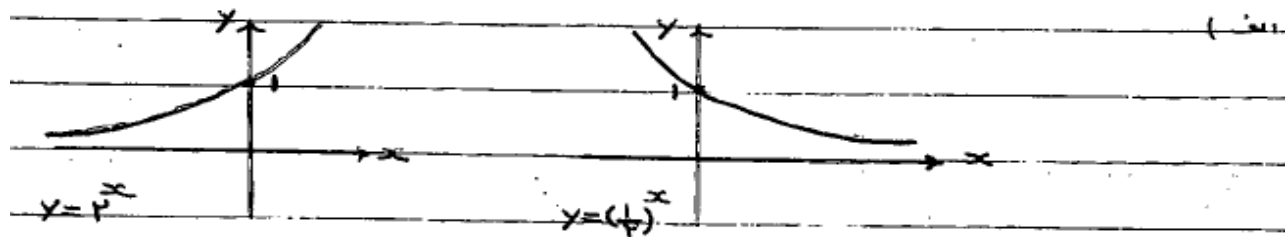
۱۴

$$2f = \left\{ (0, 4), (1, -2), \left(3, \frac{1}{3}\right), (-2, 6), (-1, 2) \right\}, g = \left\{ (2, \sqrt{2}), (-1, 2), \left(\frac{1}{4}, 3\right), \left(1, \frac{3}{4}\right) \right\}$$

$$2f - g = \left\{ \left(1, \frac{-7}{4}\right), (-1, 0) \right\}$$

۱۵

الف)



ب)

$$y = 2^x \quad D_f = \mathbb{R}, \quad R_f = (0, +\infty)$$

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x \quad D_f = \mathbb{R}, \quad R_f = (0, +\infty)$$

۱۶

ب)

پ) بله، زیرا هر خط افقی نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع می کند.