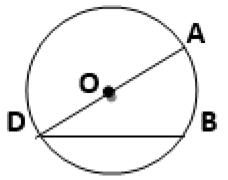
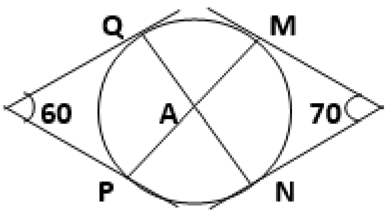
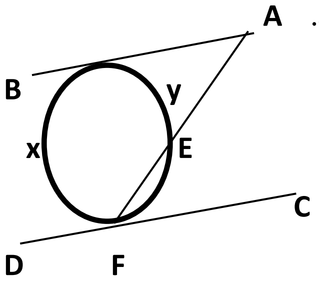
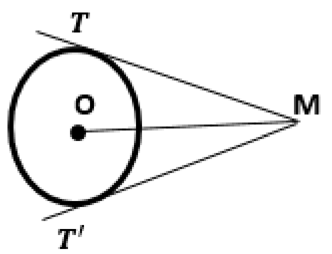
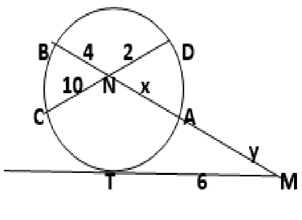
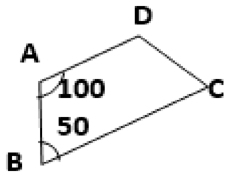
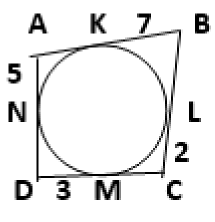
نمره تجدید نظر به عدد: نمره به حروف:	نمره به عدد: نمره به حروف:	محل مهر و امضاء مدیر
نام دبیر: تاریخ و امضاء:	نام دبیر: تاریخ و امضاء:	

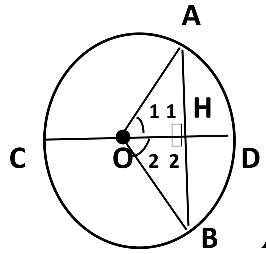
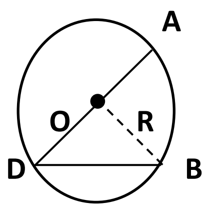
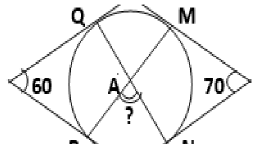
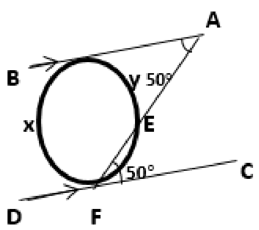
ردیف	سؤالات	بارم
۱	**جاهای خالی را با عبارات مناسب پرکنید** **الف) تبدیل هایی که طول پاره خط را حفظ می کنند ،تبدیلات __________ نامیده می شوند.** **ب) یک چهارضلعی محاطی است ، اگر وفقط اگر دو زاویه مقابل آن __________ باشند.** **ج)اگرفاصله ی خطی از مرکز دایره برابر شعاع دایره باشد. خط ودایره ______نقطه اشتراک دارند ، یعنی ________**	۱
۲	**ثابت کنید اگر قطری از یک دایره یکی از وترهای آن دایره را نصف کند ، بر آن وتر عمود است و کمان نظیر آن وتر را نیز نصف می کند.**	۱
۳	**در شکل زیر $A\widehat{D}B$یک زاویه محاطی است که یک ضلع آن از مرکز دایره عبور کرده است ، ثابت کنید اندازه این زاویه برابر با نصف اندازه کمان متقابل آن است.** 	۱
۴	**در شکل زیر زاویه $P\widehat{A}N$ را محاسبه نمایید.** 	۲

۵	در شکل مقابل اگر $A\widehat{F}C = 50^\circ$ و $AB \parallel CD$ باشد، آنگاه مقدار x و y را بدست آورید. 	۱/۵
۶	ثابت کنید هرگاه از نقطه M خارج دایره C(O,R) دو مماس بر دایره رسم کنیم و T و T' نقاط تماس باشند، آنگاه مطلوب است: الف) اندازه دو مماس برابرند. ب) اگر زاویه بین دو مماس 60° باشد، نسبت $\frac{R}{OM}$ را بیابید. ج) $TT' = \frac{2R\times MT}{OM}$ 	۲
۷	شعاع های دو دایره متخارج را بدست آورید که طول مماس مشترک خارجی آنها مساوی $3\sqrt{7}$ و طول مماس مشترک داخلی آنها $\sqrt{15}$ و طول خط المرکزین آنها مساوی ۸ واحد است.	۱/۵
۸	در شکل روبرو مقدار x و y را بدست آورید. 	۱/۵

۹	اگر r_aوr_bوr_c شعاع های سه دایره محاطی خارجی مثلث و $\mathbf{r}$ شعاع دایره محاطی داخلی باشد، نشان دهید : $\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{1}{r}$	۱/۵
۱۰	دو زاویه مجاور یک چهارضلعی محاطی 50° و 100°است. قدرمطلق تفاضل دو زاویه دیگر چقدر است ؟  	۱
۱۱	الف) نشان دهید اگر یک چهارضلعی محیطی باشد، آنگاه مجموع اندازه های دو ضلع مقابل، برابر مجموع اندازه های دو ضلع دیگر است ؟ ب) در شکل زیر دایره محاطی در نقاط K و L و M و N بر اضلاع چهاضلعی مماس است. محیط چهارضلعی را بدست آورید.  	۲

۱۲	**ثابت کنید تصویر هر خط راست تحت اثر تبدیل طولپا، خطی راست است.**	۱/۵
۱۳	**ثابت کنید بازتاب یک زاویه نسبت به یک محور ، زاویه ای برابر با آن است.**	۱/۵
۱۴	**اگر طول خط المرکزین دو دایره ۸ و شعاع های آنها $a+3$ و $2a-5$ باشد، مقدار a را طوری تعیین کنید که این دو دایره فقط یک مماس مشترک داشته باشند.**	۱

جمع بارم : ۲۰ نمره

	ردیف
الف) طولپا ب) مکمل ج) یک – خط بر دایره مماس است	۱
 فرض : AH=HB حکم $\begin{cases}\widehat{H_1}=\widehat{H_2}=90(\text{یا } CD\perp AB)\\ \widehat{AD}=\widehat{BD}\end{cases}$ $\left.\begin{array}{l}AH=HB\\ OA=OB=r\\ OH=OH\end{array}\right\} \xrightarrow{(\text{ض ض ض})} \Delta AOH \cong \Delta BOH \Rightarrow \begin{cases}\hat{O}_1=\hat{O}_2 \Rightarrow \widehat{AD}=\widehat{BD}\\ \hat{H}_1=\hat{H}_2 \to \hat{H}_1+\hat{H}_2=180\\ \to \hat{H}_1=90 \to CD\perp AB\end{cases}$	۲
از B به نقطه O ، (مرکز دایره) وصل می‌کنیم : $BO=OD=R \Rightarrow \text{متساوی الساقین است } \Delta BOD \Rightarrow O\hat{B}D = O\hat{D}B$  حال با توجه به اینکه زاویه AOB ، زاویه خارجی مثلث BOD می‌باشد، داریم: $\left.\begin{array}{l}A\hat{O}B = 2O\hat{D}B\\ \text{زاویه مرکزی : } A\hat{O}B=\widehat{AB}\end{array}\right\} \Rightarrow O\hat{D}B=\frac{1}{2}\widehat{AB}$	۳
 $70^\circ = \frac{(\widehat{QM}+\widehat{PQ}+\widehat{PN})-\widehat{MN}}{2} \Rightarrow \widehat{QM}+\widehat{PQ}+\widehat{PN}-\widehat{MN}=140^\circ$ $60^\circ = \frac{(\widehat{QM}+\widehat{MN}+\widehat{PN})-\widehat{PQ}}{2} \Rightarrow \widehat{QM}+\widehat{MN}+\widehat{PN}-\widehat{PQ}=120^\circ$ از جمع دو تساوی بالا داریم : $2\widehat{QM}+2\widehat{PN}=260^\circ \Rightarrow \widehat{QM}+\widehat{PN}=130^\circ$ از طرفی مطابق با زاویه بین وترهای متقاطع درون دایره داریم : $\hat{A}=\frac{\widehat{QM}+\widehat{PN}}{2}=\frac{130^\circ}{2}=65^\circ$	۴
 $50^\circ = \text{زاویه ظلی } A\hat{F}C=\frac{\widehat{FE}}{2} \Rightarrow \widehat{FE}=100$ $\left.\begin{array}{l}AB \parallel CD\\ \text{مورب } AF\end{array}\right\} \Longrightarrow \hat{A}=A\hat{F}C=50^\circ$ $\left.\begin{array}{l}50^\circ = \text{زاویه امتداد وتر } \hat{A}=\frac{x-y}{2} \to x-y=100^\circ\\ x+y=360-100 \to x+y=260\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases}x=180^\circ\\ y=80^\circ\end{cases}$	۵

۶

الف

$$\left.\begin{cases} OM = OM \\ \widehat{T} = \widehat{T'} = 90 \\ OT = OT' = R \end{cases}\right. \xrightarrow{\text{وتر یک ضلع}} \Delta OTM \cong \Delta OT'M \Rightarrow \begin{cases} MT = MT' \\ \widehat{M}_1 = \widehat{M}_2 \end{cases}$$

OM نیمساز $T\widehat{M}T'$ زاویه است.

ب) $\sin 30° = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{R}{OM} = \frac{1}{2}$

ج) مساحت چهارضلعی MTOT' را به دو روش می‌نویسیم:

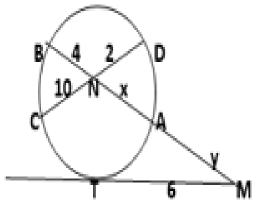
1) $S(MTOT') = \frac{1}{2}OM \times TT'$

2) $S(MTOT') = 2S(MTO) = 2 \times \frac{1}{2} \times OT \times MT \Rightarrow \frac{1}{2}OM \times TT' = OT \times MT \rightarrow TT' = \frac{2R\times MT}{OM}$

۷

$$\begin{cases} TT'^2 = d^2 - (R - R')^2 \\ TT'^2 = d^2 - (R - R')^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 63 = 64 - (R - R')^2 \\ 15 = 64 - (R + R')^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R - R' = 1 \\ R + R' = 7 \end{cases} \Rightarrow 2R = 8 \Rightarrow R = 4 \Rightarrow R' = 3$$

۸



با توجه به رابطه طولی وترهای متقاطع درون دایره، داریم :

$$NA \times NB = NC \times ND \Rightarrow x \times 4 = 10 \times 2 \Rightarrow x = 5$$

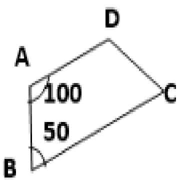
اکنون از رابطه طولی قاطع و مماس استفاده می‌کنیم :

$$MT^2 = MA \times MB \Rightarrow 6^2 = y(y + 9)$$
$$\Rightarrow y^2 + 9y - 36 = 0 \Rightarrow (y - 3)(y + 12) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 3 \\ y = -12 \ \text{غ ق ق} \end{cases}$$

۹

$$S = rp \Rightarrow \frac{1}{r} = \frac{p}{S}$$
$$r_a = \frac{S}{p-a} \Rightarrow \frac{1}{r_a} = \frac{p-a}{S}$$
$$r_b = \frac{S}{p-b} \Rightarrow \frac{1}{r_b} = \frac{p-b}{S}$$
$$r_c = \frac{S}{p-c} \Rightarrow \frac{1}{r_c} = \frac{p-c}{S}$$
$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{p-a}{S} + \frac{p-b}{S} + \frac{p-c}{S} = \frac{3p-(a+b+c)}{S} = \frac{3p-2p}{S} = \frac{q}{S} = \frac{1}{r} \Rightarrow \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}$$

۱۰



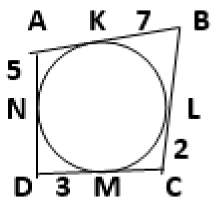
$$\left.\begin{matrix} \widehat{A} + \widehat{C} = 180° \\ \widehat{B} + \widehat{D} = 180° \end{matrix}\right] \Rightarrow \begin{cases} 100° + \widehat{C} = 180° \\ 50° + \widehat{D} = 180° \end{cases}$$

$$\begin{cases} \widehat{C} = 80° \\ \widehat{D} = 130° \end{cases} \Rightarrow \left|\widehat{C} - \widehat{D}\right| = |80° - 130°| = 50°$$

۱۱

الف) فرض می‌کنیم محل تماس دایره محاطی این چهارضلعی با اضلاع آن ، نقاط K,L,M,N باشند.

حال با توجه به اینکه طول مماس‌های مرسوم بر یک دایره از یک نقطه خارج از آن ، با یکدیگر برابرند، داریم :



AK = AN
BK = BL
CL = CM
DM = DN
⇒ AK + KB + CM + MD = AN + BL + CL + DN ⇒ AB + CD = BC + AD

ب) می‌دانیم طول مماس‌های مرسوم بر دایره از یک نقطه خارج از آن، باهم برابرند، پس داریم:

AK = AN =5
DN = DM =3
CM = CL =2
BL = BK =7
⇒ AK + KB +BL + LC + CM +MD + DN + NA =AB + BC + CD + DA =34

۱۲

فرض : T تبدیلی ایزومتری و d خطی راست است.

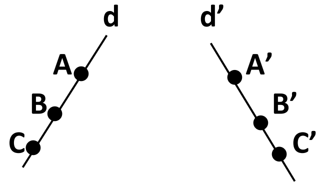
حکم : تصویر خط راست ، خطی راست است .

برهان : فرض می‌کنیم A و B و C سه نقطه‌ی دلخواه روی خط d باشند و B بین A و C قرار داشته باشد.

باید ثابت کنیم T(A) و T(B) و T(C) روی یک خط راست می‌باشند. فرض می‌کنیم : T(A)=A′ , T(B)=B′ , T(C)=C′

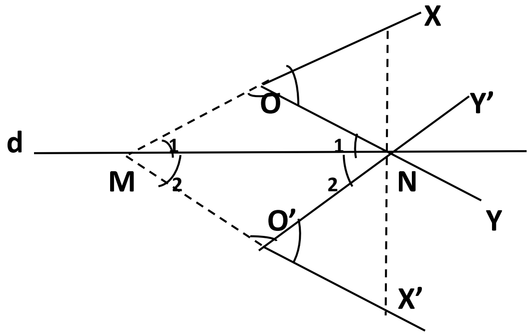
و چون AB+BC=AC و چون T تبدیلی طولپا است، پس : AB=A′B′ و BC=B′C′ و AC=A′C′ پس : A′B′+B′C′=A′C′

یعنی A′ و B′ و C′ روی یک خط راست قرار دارند.



۱۳

فرض می‌کنیم در شکل زیر بازتاب زاویه XOY تحت بازتاب نسبت به خط d زاویه‌ی $X'O'Y'$ است. باید ثابت کنیم : $\widehat{O}=\widehat{O'}$. امتداد OX و OX' محور بازتاب را در نقطه‌ی M قطع می‌کند. همچنین نقطه N محل برخورد OY و OY' با محور بازتاب است. چون $\widehat{M}_1=\widehat{M}_2$ و $\widehat{N}_1=\widehat{N}_2$ و زاویه‌های $X\widehat{O}Y$ و $X'\widehat{O}Y'$ به ترتیب زاویه‌های خارجی مثلث‌های ΔOMN و $\Delta O'MN$ هستند، پس $X\widehat{O}Y = X'\widehat{O'}Y'$.



۱۴

فرض کنیم $R=a+3$ و $R'=2a-5$ و $OO'=8$ و با توجه به اینکه در مسئله گفته شده فقط یک مماس مشترک داشته باشد. پس دو دایره مماس داخل اند. یعنی باید : $OO'=|R-R'|$ لذا :

$$8=|a+3-2a+5| \rightarrow 8=|-a+8| \rightarrow \begin{cases} 8=|-a+8| \Rightarrow a=0 \longrightarrow R'=-5 \text{ غ ق ق} \\ 8=-(a+8)=a-8 \Rightarrow a=16 \end{cases}$$