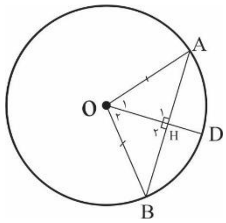
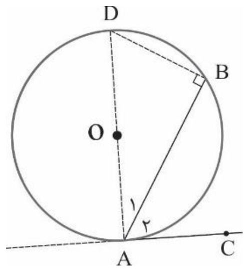
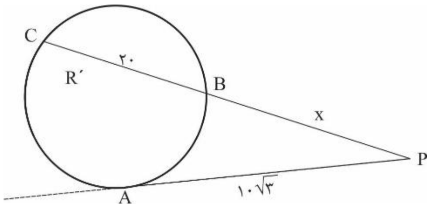
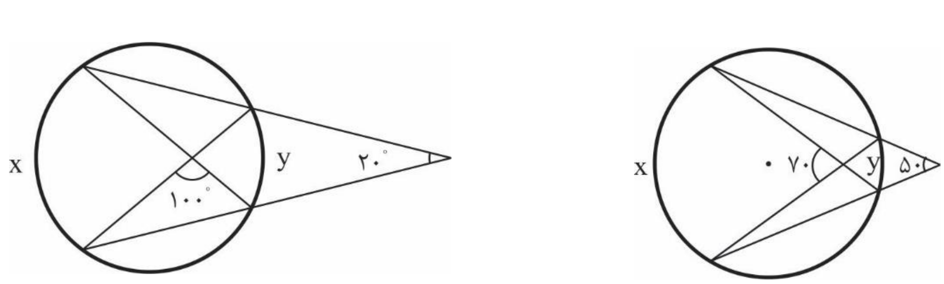
<table>
<tr><th>ردیف</th><th>« سؤالات »</th><th>نمره</th></tr>
<tr><td>۱</td><td>ثابت کنید قطری از دایره که بر وتر عمود است، وتر و کمان نظیر آن را نصف می‌کند.

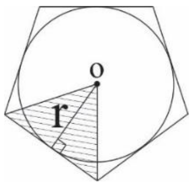
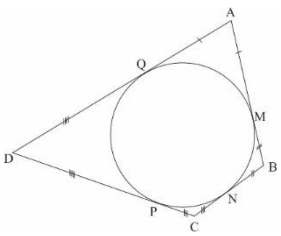
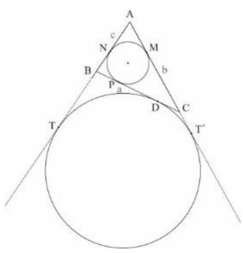

</td><td>۱,۵</td></tr>
<tr><td>۲</td><td>ثابت کنید اندازهٔ زاویهٔ ظلّی نصف کمان محصور بین دو ضلع آن زاویه می‌باشد.

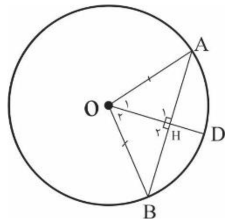

</td><td>۱,۵</td></tr>
<tr><td>۳</td><td>در دایرهٔ $C(O,R)$ وتر AB، وتر CD به طول ۹cm را به نسبت ۱ به ۲ تقسیم کرده است. اگر $AB = ۱۱cm$. آنگاه وتر CD وتر AB را به چه نسبتی قطع کرده است؟</td><td>۲</td></tr>
<tr><td>۴</td><td>از نقطهٔ P در خارج دایره، مماس PA به‌طول $۱۰\sqrt{۳}$ را بر آن رسم کرده‌ایم (A روی محیط دایره است). همچنین خط راستی از P گذرانده‌ایم که دایره را در دو نقطهٔ B و C قطع کرده است و $BC = ۲۰$. طول‌های PB و PC را به‌دست آورید.

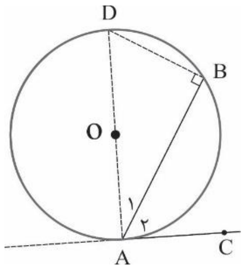

</td><td>۱,۵</td></tr>
<tr><td>۵</td><td>مقدار x و y را بیابید.


</td><td>۲</td></tr>
<tr><td>۶</td><td>وضعیت دایره‌ها با مشخصات داده شده را نسبت به یکدیگر مشخص نمایید.

الف: $R = ۲, R' = ۳, d = ۲$ ب: $R = ۲, R' = ۴, d = ۱$ ج: $R = ۲, R' = ۱, d = ۳$</td><td>۱,۵</td></tr>
</table>

۷	طول شعاع‌های دو دایرهٔ متخارج را به دست آورید که طول مماس مشترک خارجی آنها مساوی $3\sqrt{7}$ و طول مماس مشترک داخلی آنها $\sqrt{15}$ و خط‌المرکزین آنها مساوی ۸ واحد است.	۲
۸	جای خالی را پر کنید: الف)یک دایره محیطی است ⇔ یک چندضلعی (محاطی) وجود داشته باشد که تمام ....آن روی محیط دایره باشد. ⇔ ....همهٔ اضلاع آن چند ضلعی هم‌رأس باشند. یک دایره محاطی است ⇔ یک چندضلعی (محیطی) وجود داشته باشد که تمام ....آن، مماس‌های دایره باشد. ⇔.................. همهٔ زاویه‌های آن چندضلعی هم‌رأس باشند.	۲
۹	اگر در یک n ضلعی محیطی با مساحت S و محیط ۲P شعاع دایرهٔ محاطی برابر r باشد، نشان دهید $S = rP$  	۱
۱۰	ثابت کنید اگر یک چهارضلعی محیطی باشد، مجموع اندازه‌های دو ضلع مقابل مساوی مجموع اندازه‌های دو ضلع مقابل دیگر است.  	۱,۵
۱۱	اگر r_c , r_b , r_a شعاع‌های سه دایرهٔ محاطی خارجی مثلث و r شعاع دایرهٔ محاطی داخلی باشد نشان دهید. $\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{1}{r}$	۱,۵
۱۲	اگر تقاط تماس دایرهٔ محاطی داخلی مثلث ABC با اضلاع آن، P , N , M باشند و T', T نقطه‌های تماس یک دایرهٔ محاطی خارجی با خط‌های شامل دو ضلع باشند، نشان دهید: (۲ نمره)  $BN = BP = P - b \; , \; CM = CP = P - c$	۲

<table>
<tr><th>نمره</th><th>راهنمای تصحیح</th><th>ردیف</th></tr>
<tr><td>۱,۵</td><td>


$$\begin{cases} OA=OB: \\ OH: \text{مشترک} \\ \hat{H}_۱=\hat{H}_۲=۹۰^\circ \quad \text{فرض مسئله} \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{matrix} AH=BH \\ \hat{O}_۱=\hat{O}_۲ \Rightarrow AD=BD \end{matrix}$$
</td><td>۱</td></tr>
<tr><td>۱,۵</td><td>


زاویهٔ $B\hat{A}C$ یک زاویهٔ ظلّی است که اندازهٔ آن برابر نصف کمان روبه‌روی آن یعنی AB می‌باشد.

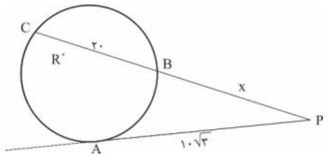
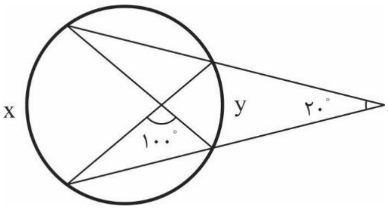
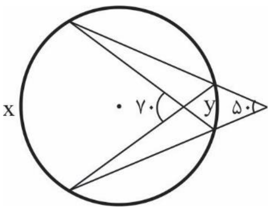
کافی است دقت نمائیم زاویهٔ $\hat{B}$ برابر ۹۰° می‌باشد، زیرا زاویه‌ای محاطی و رو به قطر یا کمان ۱۸۰° است. همچنین زاویهٔ $\hat{A}$ نیز قائمه است، زیرا شعاع بر خط مماس در نقطهٔ تماس عمود است.

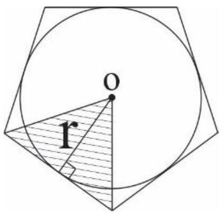
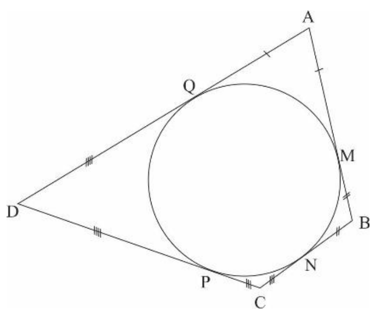
$$\overset{\Delta}{ADB}: \hat{D}+\hat{A}_۲+\underset{۹۰^\circ}{\hat{B}}=۱۸۰^\circ \Rightarrow \begin{matrix} \hat{D}+\hat{A}_۲=۹۰^\circ \\ \hat{A}_۱+\hat{A}_۲=۹۰^\circ \end{matrix} \Rightarrow \hat{D}=\hat{A}_۱ \quad \Rightarrow A_۱=\frac{AB}{۲}$$
</td><td>۲</td></tr>
<tr><td>۲</td><td>
$$\left.\begin{matrix} MA.MB=MC.MD \\ ۹ \xrightarrow{\hspace{3cm}} ۳,۶ \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} MA.MB=۳\times۶=۱۸ \\ MA+MB=۱۱ \end{cases}$$

تقسیم به نسبت ۱ به ۲

$$MA=۱۱-MB \Rightarrow MB.(۱۱-MB)=۱۸ \Rightarrow MB^۲-۱۱MB+۱۸=۰ \Rightarrow (MB-۲)(MB-۹)=۰$$

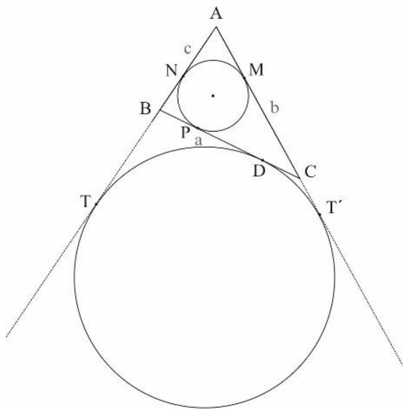
$$MB=۹ \Rightarrow MA=۲$$
</td><td>۳</td></tr>
</table>

۴	 غ ق ق $PA^{۲} = PB.PC$ $(۱۰\sqrt{۳})^{۲} = x.(x+۲۰)$ $۳۰۰ = x^{۲} + ۲۰x$ $x^{۲} + ۲۰x - ۳۰۰ = ۰$ $(x+۳۰)(x-۱۰) = ۰$ $\begin{cases} x = -۳۰ \\ x = ۱۰ \end{cases} \Rightarrow PB = ۱۰, PC = ۳۰$	۱٫۵
۵	  $\frac{x+y}{۲} = ۸۰ \quad \frac{x-y}{۲} = ۲۰$ $\begin{cases} x+y = ۱۶۰ \\ x-y = ۴۰ \end{cases} \quad \begin{matrix} x = ۱۰۰ \\ y = ۶۰ \end{matrix}$ $\frac{x+y}{۲} = ۷۰ \quad \frac{x-y}{۲} = ۵۰$ $\begin{cases} x+y = ۱۴۰ \\ x-y = ۱۰۰ \end{cases} \quad \begin{matrix} x = ۱۲۰ \\ y = ۲۰ \end{matrix}$	۲
۶	الف: $\|R-R'\| \le d \le R+R'$؛ در نتیجه دو دایره متقاطع می‌باشند. ب: $d < \|R-R'\|$؛ در نتیجه دو دایره متداخل هستند. ج: پ $d = R+R'$؛ در نتیجه دو دایره مماس بیرون هستند.	۱٫۵
۷	طول مماس مشترک داخلی: $= \sqrt{d^{۲} - (R+R')^{۲}} \Rightarrow \sqrt{۱۵} = \sqrt{۸^{۲} - (R+R')^{۲}} \Rightarrow ۱۵ = ۶۴ - (R+R')^{۲}$ طول مماس مشترک خارجی: $= \sqrt{d^{۲} - (R-R')^{۲}} \Rightarrow ۳\sqrt{۷} = \sqrt{۸^{۲} - (R-R')^{۲}} \Rightarrow ۶۳ = ۶۴ - (R-R')^{۲}$	۲

۸	الف: رئوس، عمود منصف ب) اضلاع، نیمسازهای	۲
۹	 مساحت مثلث هاشورخورده $= \frac{۱}{۲} \times$ ارتفاع × طول قاعده $= \frac{۱}{۲} \times r \times \frac{۲P}{n} = \frac{Pr}{n}$ مساحت مثلث هاشورخورده $\times n =$ مساحت n ضلعی محیطی $= S$ $S = n \times \frac{Pr}{n} = Pr$	۱
۱۰	اگر یک چهارضلعی محیطی باشد، تمام اضلاع آن بر دایره‌ای مماس خواهند بود. می‌دانیم طول هر دو مماس رسم شده از یک نقطه بر دایره با هم برابر است. با توجه به شکل خواهیم داشت: $AM = AQ$ $MB = BN$ $PC = NC$ $+ \quad PD = DQ$ $AB + CD = AD + BC$ 	۱٫۵
۱۱	می‌دانیم $S = Pr, r_a = \frac{S}{P-a}$ داریم: $\frac{۱}{r_a} = \frac{P-a}{S}$, $\frac{۱}{r_b} = \frac{P-b}{S}$, $\frac{۱}{r_c} = \frac{P-c}{S}$, $\frac{۱}{r} = \frac{P}{S}$ $\Leftrightarrow \frac{P-a}{S} + \frac{P-b}{S} + \frac{P-c}{S} = \frac{P}{S}$ $\Leftrightarrow ۳P - (a+b+c) = P,\ (a+b+c) = ۲p$ $\Leftrightarrow ۳P - ۲P = P$	۱٫۵

۱۲

$$BN = BP = P - b\ ,\ CM = CP = P - c$$



می‌دانیم مماس‌های رسم شده از یک نقطه با یکدیگر برابرند. پس خواهیم داشت:

$$AN = AM = x\ ,\ BN = BP = y\ ,\ CP = CM = z$$

$$a + b + c = ۲P \Rightarrow (y + z) + (x + z) + (x + y) = ۲P \Rightarrow ۲x + ۲y + ۲z = ۲p$$
$$x + y + z = P$$

از طرفی داریم $a = y + z$، در نتیجه داریم $x + a = P$ با جابه‌جایی خواهیم داشت:

$$x = P - a \Rightarrow AM = P - a$$

و به همین ترتیب با جایگذاری $c = x + y\ ,\ b = x + z$ خواهیم داشت:

$$BN = BP = P - b,\ \ CM = CP = P - c$$

و برای اثبات آخرین بخش می‌دانیم $AT = AT'$ از طرفی BD=BT (مماس‌های رسم شده از نقطهٔ B بر دایرهٔ محاطی خارجی) و $CD = CT'$ (مماس‌های رسم شده از نقطهٔ C بر دایرهٔ محاطی خارجی)

$$۲P = AB + AC + BC \Rightarrow ۲P = AB + AC + BD + DC$$

$$\Rightarrow ۲P = (AB + BT) + (AC + CT') \Rightarrow ۲P = AT + AT' \xrightarrow{AT = AT'} ۲P = ۲AT = ۲AT'$$

$$\Rightarrow P = AT = AT'$$

۲