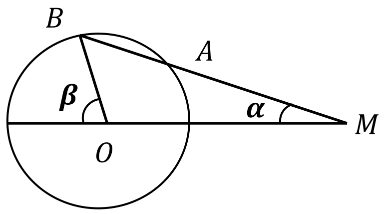
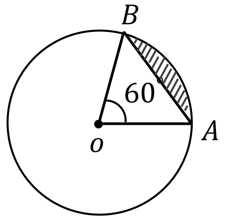
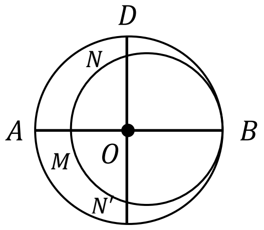
ردیف	سؤالات	بارم
۱	ثابت کنید در یک دایره، وترهای نظیر دو کمان مساوی با هم برابرند.	۱
۲	ثابت کنید اندازهٔ هر زاویه‌ی ظلی برابر نصف کمان روبه‌روی آن است.	۱
۳	دایرهٔ $C(0,2)$ مفروض است. از نقطه‌ی M در خارج دایره خطی چنان رسم کرده‌ایم که دایره را در دو نقطه‌ی A و B قطع کرده است و $MA = 2$. اگر $\alpha = 20^\circ$ باشد، نشان دهید که $\beta = 60^\circ$.  	۱
۴	دایره‌ای به شعاع $4\ Cm$ را در نظر بگیرید. اگر زاویهٔ مرکزی قطاعی از دایره مساوی 60° باشد، مطلوب است: الف) طول کمان AB ب) مساحت قطاع ج) مساحت ناحیه هاشور زده  	۱/۵

۵ در شکل مقابل، دو دایره برهم مماس و دو قطر AB و CD از دایره بزرگ‌تر برهم عمودند. اگر $AM = 16$ و $ND = 10$ ، شعاع‌های دو دایره را پیدا کنید.



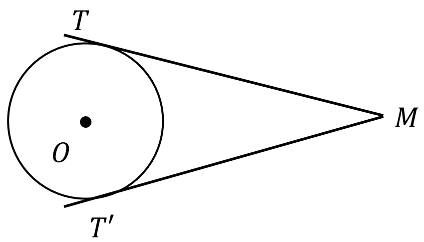
۱/۵

۶ هرگاه از نقطه‌ی M خارج دایره $C(O,R)$ دو مماس بر دایره رسم کنیم و T و T' نقاط تماس باشند. ثابت کنید که :

الف) اندازه‌های دو مماس برابرند.

ب) نیم‌خط OM نیمساز زاویه‌ی TMT' است.

ج) طول پاره‌خط واصل نقطه‌ای تماس $TT' = \frac{2R\times MT}{OM}$



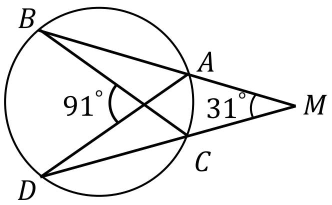
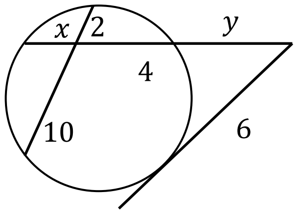
۱/۵

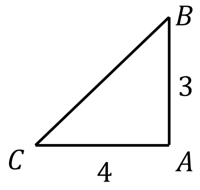
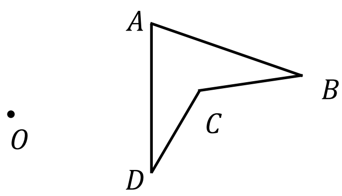
۷ دو دایره‌ی $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ مفروض‌اند. اگر $oo' = d$. مطلوب است:

الف) ثابت کنید که طول مماس مشترک خارجی این دو دایره، $TT' = \sqrt{d^2-(R-R')^2}$ است.

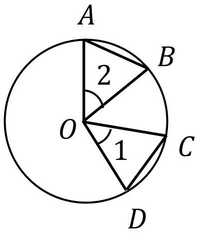
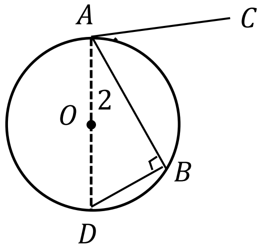
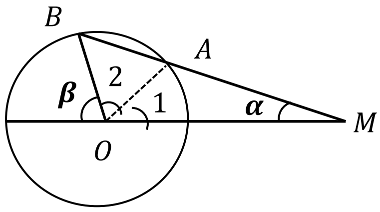
ب) اگر $C(O,10)$ و $C'(O',2)$ باشد که مماس خارج‌اند، طول مماس مشترک خارجی آنها را بدست آورید.

۲

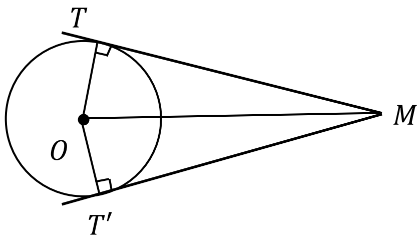
۸	اندازه یک زاویهٔ ذوزنقه <u>متساوی الساقین محیطی</u> برابر 45° است. اگر طول قاعدهٔ کوچک آن ۴ باشد، طول قاعده بزرگ آن را به دست آورید.	۱
۹	اگر r_a ، r_b ، r_c شعاع‌های سه دایره محاطی خارجی مثلث و r شعاع دایره محاطی داخلی باشد، نشان دهید که : $$\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{1}{r}$$	۱/۵
۱۰	در شکل مقابل اندازهٔ زاویه‌ی $\widehat{B}$ را بدست آورید. 	۱
۱۱	در شکل زیر مقدار x و y را محاسبه نمائید. 	۱
۱۲	ثابت کنید هر تبدیل طولپا، اندازه‌ی زاویه را حفظ می‌کند.	۱/۵

۱۳	دوران یافته‌ی هر شکل را رسم نمائید. الف) دوران به مرکز A و با زاویه‌ی 90° در جهت حرکت عقربه‌های ساعت  ب) دوران به مرکز O و با زاویه‌ی 120° در جهت حرکت خلاف عقربه‌های ساعت  	۲
۱۴	ثابت کنید تصویر هر خط راست، تحت اثر تبدیل طولپا، خطی راست است.		۱
۱۵	بررسی کنید که بازتاب شیب‌خط را حفظ می‌کند یا خیر؟	۱/۵

جمع بارم : ۲۰ نمره

ردیف	راهنمای تصحیح — محل مهر یا امضاء مدیر
۱	حکم: $\widehat{AB}=\widehat{CD}$ فرض: $\widehat{AB}=\widehat{CD}$  $\begin{cases}AB=DC\\OA=OC=R\\OB=OD=R\end{cases}\xRightarrow{(\text{ض،ض،ض})}\overset{\Delta}{OAB}\simeq\overset{\Delta}{OCD}\Rightarrow\widehat{O_1}=\widehat{O_2}\Rightarrow\widehat{DC}=\widehat{AB}$
۲	ابتدا قطری از دایره که از نقطه‌ی A می‌گذرد را رسم می‌کنیم و سپس از B به D وصل می‌کنیم.  $\widehat{B}=\frac{180}{2}=90^\circ$ $ABD: \widehat{B}=90^\circ\Rightarrow\widehat{A_2}+\widehat{D}=90$ اشعاع بر خط مماس عمود است $(CA\perp AD)\Rightarrow\widehat{A_1}+\widehat{A_2}=90^\circ$ $\Rightarrow\widehat{A_1}=\widehat{D}$ $\widehat{D}$محاطی $=\frac{\widehat{AB}}{2}$ و بنابراین $\widehat{A_1}=\frac{\widehat{AB}}{2}$
۳	از A به O وصل می‌کنیم. دو مثلث OAM و OBA متساوی‌الساقین می‌باشند پس $\widehat{O_1}=\alpha$ و چون $\widehat{A_2}$. زاویه‌ی خارجی OAM است پس $\widehat{A_2}=\alpha+\alpha=2\alpha$. بنابراین $\widehat{B}=2\alpha$ و حال β زاویه‌ی خارجی مثلث OBM است پس $\widehat{\beta}=2\alpha+\alpha=3\alpha=3(20)=60$ 
۴	الف) $\widehat{O}$ زاویه‌ی مرکزی است پس $\widehat{AB}=60^\circ$. لذا $\frac{\widehat{AB}}{360^\circ}=\frac{\text{طول کمان } AB}{\text{محیط دایره}}\Rightarrow\frac{60^\circ}{360}=\frac{\lvert AB\rvert}{2\pi\times4}\Rightarrow\lvert AB\rvert=\frac{2\pi\times4\times\cancel{60}}{\cancel{360}_6}=\frac{4\pi}{3}$ ب) $S_{\text{قطاع}}=\frac{\pi R^2\alpha}{360}=\frac{\pi\times4^2\times60}{360}=\frac{8\pi}{3}$ پ) $\overset{\Delta}{OAB}$ یک مثلث متساوی‌الاضلاع است به ضلع 4cm . لذا $S_{OAB}=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ $S_{\text{هاشور زده}}=S_{\text{قطاع}}-S_{\overset{\Delta}{OAB}}=\frac{8\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\times4^2=\frac{8\pi}{3}-4\sqrt{3}$
۵	$\mathrm{OB.OM}=\mathrm{ON.ON'}\Rightarrow R(R-16)=(R-10)(R-10)$ $\Rightarrow R^2-16R=R^2-20R+100\Rightarrow 4R=100\rightarrow R=25$ $R'=\frac{MB}{2}\Rightarrow R'=\frac{2R-16}{2}\Rightarrow R'=\frac{50-16}{2}=17$

۶



(الف و ب)

$$\begin{cases} OM = OM \\ \widehat{T} = \widehat{T'} = 90^\circ \\ OT = OT' = R \end{cases} \xrightarrow{\text{و ترویک ضلع}} \overset{\Delta}{OTM} \simeq \overset{\Delta}{OTM'} \Rightarrow \begin{cases} MT = MT' \\ \widehat{M_1} = \widehat{M_2} \end{cases}$$

پس OM نیمساز زاویه است.

ج) مساحت چهار ضلعی $MTOT'$ را به دو روش محاسبه می‌کنیم.

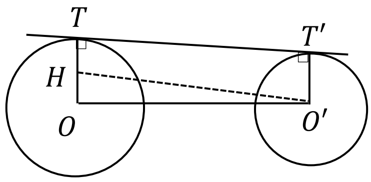
$$s(MTOT') = \frac{1}{2} OM \times TT', S(MTOT') = 2S(MTO) = 2 \times \frac{1}{2} \times OT \times MT$$

بنابراین:

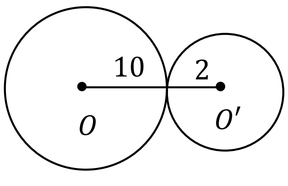
$$\frac{1}{2} OM \times TT' = OT \times MT \Rightarrow TT' = \frac{2R \times MT}{OM}$$

۷

الف) از نقطهٔ O' عمود $O'H$ را بر شعاع OT رسم می‌کنیم. چهار ضلعی $Ho'T'T$ مستطیل است زیرا چهار زاویه‌ی قائم دارد. در نتیجه $HT = O'T' = R, O'H = TT'$ و چون $OH = OT - HT$ پس $OH = R - R'$ در مثلث قائم‌الزاویه $OO'H$ بنابر قضیه‌ی فیثاغورس $OO'^2 = OH^2 + O'H^2$.



$$d^2 = (R - R')^2 + TT'^2 \Rightarrow TT' = \sqrt{d^2 - (R - R')^2}$$

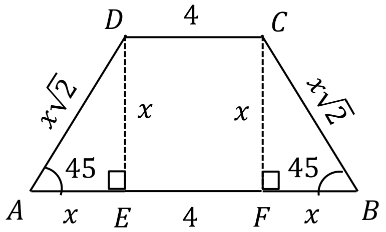


ب) $OO' = 10 + 2 = 12$

$$TT' = \sqrt{(12)^2 - (10 - 2)^2} = \sqrt{144 - 64} = \sqrt{80}$$

۸

ارتفاع‌های ذوزنقه را رسم میکنیم. دو مثلث $\overset{\Delta}{ADE}$، $\overset{\Delta}{CFB}$ قائم الزاویه و متساوی الساقین میباشند. پس اندازه اضلاع آن مطابق شکل می باشد. طبق فرض ذوزنقه محیطی است لذا :



$$AD + BC = DC + AB \Rightarrow x\sqrt{2} + x\sqrt{2} = 4 + 4 + 2x \Rightarrow$$

$$x = \frac{8}{2\sqrt{2} - 2} \Rightarrow x = \frac{8}{2\sqrt{2} - 2} \times \frac{2\sqrt{2} + 2}{2\sqrt{2} + 2} = 4(\sqrt{2} + 1) \Rightarrow$$

$$AB = 4 + 2x = 8\sqrt{2} + 12$$

۹

$$r=\frac{s}{p}\Rightarrow\frac{1}{r}=\frac{p}{s}$$

$$r_a=\frac{s}{p-a}\ ,\qquad r_b=\frac{s}{p-b}\ ,\qquad r_c=\frac{s}{p-c}\ \Rightarrow$$

$$\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{p-a}{s}+\frac{p-b}{s}+\frac{p-c}{s}=\frac{3p-(a+b+c)}{s}=$$

$$\frac{3p-2p}{S}=\frac{p}{s}=\frac{1}{r}$$

۱۰

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{M}=\dfrac{\widehat{BD}-\widehat{AC}}{2}\Rightarrow 31\times 2=\widehat{BD}-\widehat{AC}\\ \widehat{O}=\dfrac{\widehat{BD}+\widehat{AC}}{2}\Rightarrow 91\times 2=\widehat{BD}-\widehat{AC}\end{array}\right.\Rightarrow\begin{cases}\widehat{BD}-\widehat{AC}=62\\ \widehat{BD}+\widehat{AC}=182\end{cases}\Rightarrow$$

$$\widehat{BD}=122,\widehat{AC}=60$$

۱۱

$$x\times 4=2\times 10\ \Rightarrow x=5$$

$$6^2=y(y+4+x)\Rightarrow 36=y(y+4+5)\Rightarrow y^2+9y-36=0$$

$$\Rightarrow (y+12)(y-3)=0\quad\Rightarrow y=3\ ,y=-12$$ غ ق ق

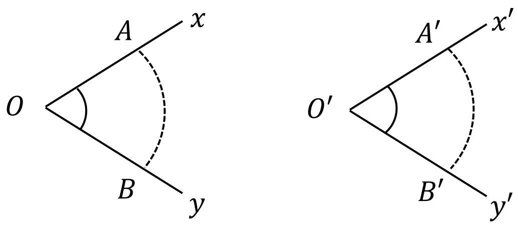
۱۲

مطابق شکل نقطه‌ی A و B را به ترتیب روی Ox و Oy در نظر می‌گیریم.

تصویر B,O,A را تحت تبدیل T به دست می آوریم. $T(O)=O',T(B)=B',T(A)=A'$

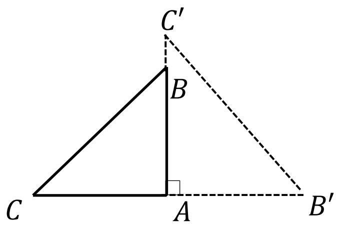
و چون T طولپا است پس $AB=A'B'\ ,OB=O'B',OA=O'A'$

پس دو مثلث $\overset{\Delta}{OAB}$ ، $\overset{\Delta}{O'A'B'}$ هم نهشت اند. پس $\widehat{O}=\widehat{O'}$

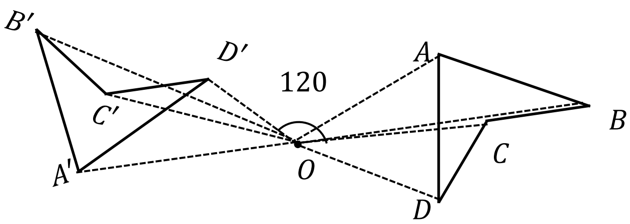


۱۳

الف)

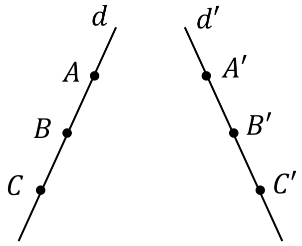


ب)



۱۴

فرض می کنیم C , B , A سه نقطه‌ی دلخواه روی خط d باشند و B بین A , C قرار داشته باشد باید ثابت کنیم $T(C), T(B), T(A)$ روی یک خط راست می‌باشند.



فرض میکنیم $T(C) = C', T(B) = B', T(A) = A'$

چون $AB + BC = AC$ و T تبدیلی طولپا است.

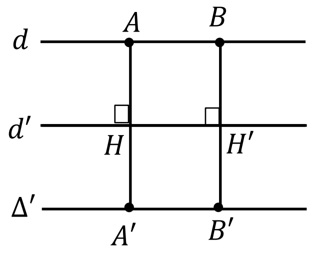
پس $AC = A'C', BC = B'C', AB = A'B'$

بنابراین با جایگذاری در رابطه‌ی فوق داریم $A'B + B'C' = A'C'$ یعنی C', B', A' روی یک خط راست واقع شده اند.

۱۵

خط Δ و محور بازتاب d را در نظر می‌گیریم. سه حالت رخ می‌دهد. به بررسی هر سه حالت می‌پردازیم:

حالت اول :اگر خط Δ موازی خط بازتاب $\mathbf{d}$ باشد، تصویر آن تحت بازتاب خط Δ' است (شکل را ببینید). ثابت می‌کنیم Δ با Δ' موازی است. دو نقطه‌ی $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ روی Δ در نظر می‌گیریم و تصویر آن‌ها، یعنی $\mathbf{A'}$ و $\mathbf{B'}$ را به دست می‌آوریم. بنابر تعریف بازتاب



$$\mathbf{AH = A'H}$$
$$BH' = B'H'$$

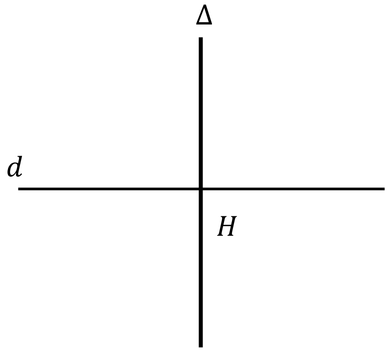
همچنین ، چون Δ با $\mathbf{d}$ موازی است، پس

$$\mathbf{AH = BH'}$$

در نتیجه

$$\mathbf{A'H = B'H'}$$

یعنی $\mathbf{A'B'}$ با $\mathbf{d}$ موازی است. بنابراین Δ' با $\mathbf{d}$ و در نهایت با Δ موازی است.



حالت دوم :اگر خط Δ برخط بازتاب $\mathbf{d}$ عمود باشد، واضح است که تصویر Δ تحت بازتاب نسبت به خط $\mathbf{d}$ خودش میشود و هر خط با خودش موازی است.

حالت سوم :اگر خط Δ با خط بازتاب $\mathbf{d}$ موازی نباشد، خط های Δ، $\mathbf{d}$ و خط Δ' که بازتاب Δ است در نقطه ای مثل $\mathbf{M}$ متقاطع هستند (شکل را ببینید). پس Δ و Δ' موازی نیستند و در این حالت بازتاب شیب خط را حفظ نمی کند.