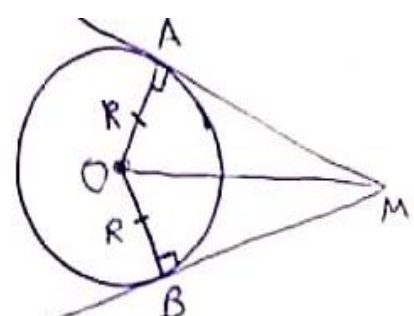
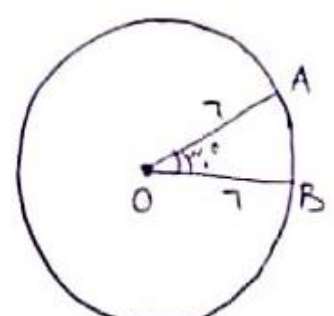
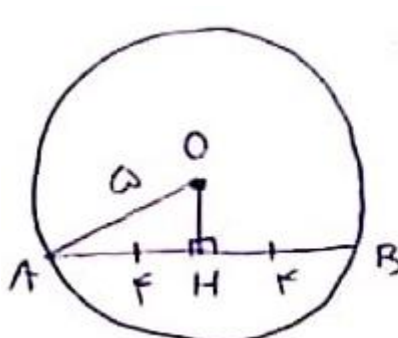
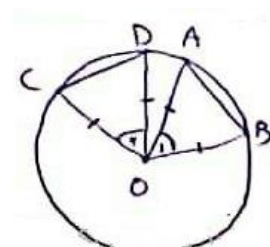


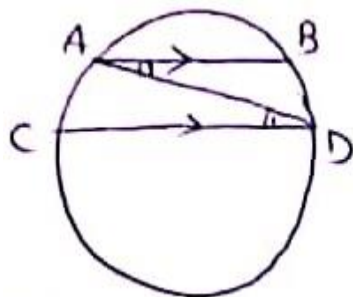
محل مهر و امضا: مدیر		نمره به عدد: نمره به حروف:	
		نمره تجدید نظر به عدد:	نمره به حروف:
نام دبیر: تاریخ و امضا:		نام دبیر: تاریخ و امضا:	
		نام دبیر:	تاریخ و امضا:
ردیف	سؤالات	نمره	نوع
۱	مفاهیم زیر را تعریف کنید: الف) وتر دایره ب) زاویه مرکزی ج) زاویه محاطی د) زاویه ظلّی		
۱	از نقطه M خارج یک دایره، دو مماس MA و MB را بر دایره رسم کرده ایم. ثابت کنید $MA=MB$.		
۱	در دایره به شعاع ۶ واحد، طول کمان و مساحت قطاع ۳۰ درجه را بیابید.		
۱	در دایره به شعاع ۵ واحد، وترى به طول ۸ واحد رسم شده است. فاصله مرکز دایره از این وتر را بیابید.		
۱	ثابت کنید اگر دو کمان از دایره ای برابر باشند، وترهای نظیر آن ها هم برابرند.		
۱	ثابت کنید در هر دایره، کمان های محصور بین دو وتر موازی، برابرند.		
۱/۵	در شکل زیر، قطر AB و وتر CD موازی اند و زاویه M قائمه است. اندازه کمان CD را بیابید. 		۷
۱	در شکل زیر مقادیر x و y را بیابید. 		۸
۱/۵	وضعیت های دو دایره نسبت به هم را با رسم شکل بیان کنید.		۹
۲	طول خط المکزین دو دایره، ۱۰ واحد است. اگر طول مماس مشترک های خارجی و داخلی آن به ترتیب $2\sqrt{21}$ و ۶ واحد باشند، طول شعاع های دایره ها را بیابید.		۱۰
۱/۵	در یک دایره وتر CD به طول ۱۳ واحد، وتر AB به طول ۱۵ واحد در نقطه M قطع و آن را به نسبت یک به چهار تقسیم کرده است. طول CM و DM را بیابید.		۱۱

۱/۵	مثلی به اضلاع ۷ و ۹ و ۱۰ مفروض است. طول قطعاتی که دایره محاطی داخلی این مثلث روی ضلع بزرگ تری می سازد را بیابید.	۱۲
۱	در مثلث دلخواه ABC ، ثابت کنید: $\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}$	۱۳
۱/۵	ثابت کنید عمود منصف هر ضلع مثلث و نیمساز زاویه ی روبرو به آن ضلع، در نقطه ای روی دایره محیطی مثلث، متقاطع اند.	۱۴
۱/۵	ثابت کنید در چهارضلعی محیطی، مجموع اضلاع روبرو، با هم برابر است.	۱۵
۱	ثابت کنید در چهارضلعی محاطی، زاویه های روبرو، مکمل اند.	۱۶
صفحه ی ۲ از ۲		

جمع بارم : ۲۰ نمره

ردیف	راهنمای تصحیح رشته ریاضی	محل مهر یا امضاء مدیر
۱	<p>الف) پاره خطی است که دو نقطه از محیط دایره را به هم وصل کند. ب) زاویه ای است که راس آن، مرکز دایره است. ج) زاویه ای است که راس آن روی محیط دایره و اضلاع آن، وترهایی از دایره اند. د) زاویه ایست که راس آن روی محیط دایره، یک ضلع آن وتر و ضلع دیگر آن مماس بر دایره است.</p>	
۲	<p>می دانیم خط مماس، بر شعاع تماس عمود است، بنابراین:</p>  $\left. \begin{array}{l} OM = OM \\ OA = OB \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle OAM \cong \triangle OBM \Rightarrow AM = BM$ <p style="text-align: center;">(دو ضلع ضلع)</p>	
۳	 $AB \text{ طول کمان} = \frac{36^\circ}{360^\circ} (2\pi \times 7) = \frac{1}{10} (14\pi) = \pi$ $\text{مساحت قطاع } OAB = \frac{36^\circ}{360^\circ} (\pi \times 7^2) = \frac{1}{10} (31\pi) = \frac{31\pi}{10}$	
۴	<p>عمود OH را بر وتر رسم می‌کنیم پس $AH = HB = 4$ و داریم:</p>  $\triangle OHA: \text{ضلع قائم} \Rightarrow OH^2 + 4^2 = 5^2 \Rightarrow OH = 3$	
۵	<p>فرض کنیم $AB = CD$ سپس زاویه مرکزی O_1 و O_2 باهم برابرند:</p>  $\left. \begin{array}{l} OB = OD \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \\ OA = OC \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle OAB \cong \triangle OCD \Rightarrow AB = CD$ <p style="text-align: center;">(مقایسه)</p>	

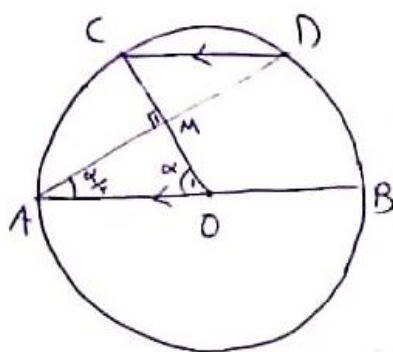
فرض کنیم AB موازی با CD باشد، بنابراین:



$$(AB \parallel CD) \text{ و } (AD \text{ وتر مشترک}) \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{C}_1 \Rightarrow \frac{1}{r} \widehat{BD} = \frac{1}{r} \widehat{AC} \\ \Rightarrow \widehat{BD} = \widehat{AC}$$

۶

فرض کنیم $O_1 = \alpha$ بنابراین $\widehat{AC} = \alpha$ و داریم:



$$AB \parallel CD \Rightarrow \widehat{BD} = \widehat{AC} = \alpha \Rightarrow \hat{A} = \frac{1}{2} \alpha \\ \text{در } \triangle OAM \text{ زاویه قائمه است } \Rightarrow 90^\circ = \alpha + \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \frac{3}{2} \alpha = 90^\circ \\ \Rightarrow \alpha = \frac{2}{3} \times 90^\circ = 60^\circ$$

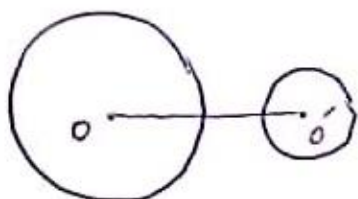
۷

با توجه به شکل داریم:

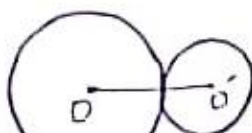
$$\begin{cases} \frac{90 + y}{2} = 50^\circ \\ \frac{90 - y}{2} = 30^\circ \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع می‌کنیم}} \begin{cases} 90 = 80^\circ \\ y = 20^\circ \end{cases}$$

۸

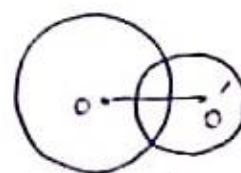
دو دایره نسبت به هم، شش وضعیت دارند:



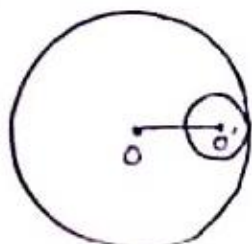
متقاطع $(d > R + R')$



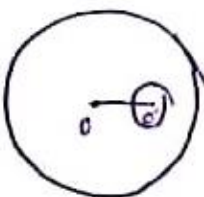
محاس خارج $(d = R + R')$



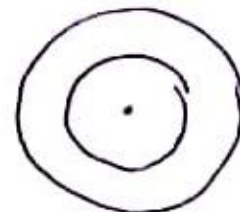
متقاطع $(|R - R'| < d < R + R')$



محاس داخل $(d = |R - R'|)$



متداخل $(d < |R - R'|)$



هم مرکز $(d = 0)$

۹

$$\sqrt{d^2 - (R - R')^2} = r \sqrt{21} \Rightarrow 100 - (R - R')^2 = 14r^2 \Rightarrow (R - R')^2 = 17$$

$$\Rightarrow R - R' = 4 \quad (*)$$

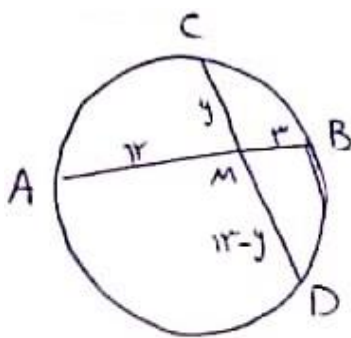
$$\sqrt{d^2 - (R + R')^2} = 7 \Rightarrow 100 - (R + R')^2 = 49 \Rightarrow (R + R')^2 = 51$$

$$\Rightarrow R + R' = 7 \quad (**)$$

$$\begin{cases} R - R' = 4 \\ R + R' = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R = 7 \\ R' = 4 \end{cases}$$

۱۰

فرض کنیم $AM = 4X$ و $MB = X$ بنابراین:



حال آنکه $CM = y$ و $MD = r - y$ و طبق توانی طوسی داریم:

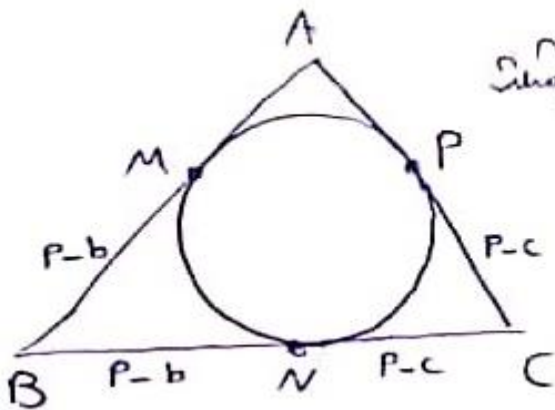
$$4x + x = 15 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow AM = 12, MB = 3$$

$$y(13 - y) = 3 \times 12 \Rightarrow y^2 - 13y + 36 = 0 \Rightarrow$$

$$(y - 4)(y - 9) = 0 \Rightarrow y = 4 \text{ یا } y = 9 \Rightarrow CM = 4, MD = 9$$

۱۱

فرض کنیم $BC = 10, AB = 9, AC = 7$ بنابراین:



$$\sum \frac{1}{2} a = 2P = 7 + 9 + 10 = 26 \Rightarrow P = 13$$

$$BM = P - b = 13 - 4 = 9$$

$$CN = P - c = 13 - 3 = 10$$

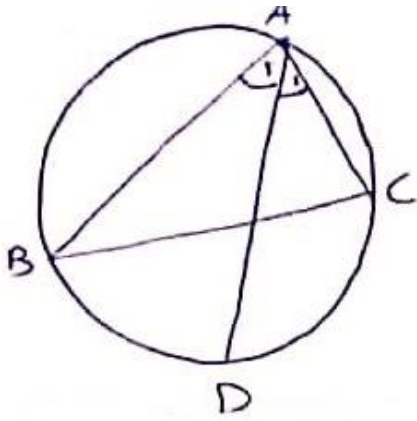
۱۲

$$r_a = \frac{S}{P-a}, r_b = \frac{S}{P-b}, r_c = \frac{S}{P-c} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{P-a}{S} + \frac{P-b}{S} + \frac{P-c}{S} = \frac{3P - (a+b+c)}{S} = \frac{P}{S} = \frac{1}{r}$$

۱۳

فرض کنیم AD نیمساز زاویه A است، بنابراین:

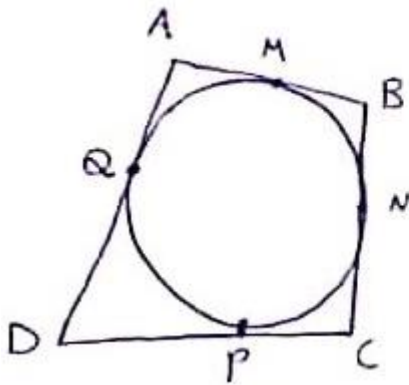


$$\hat{A}_1 = \hat{A}_2 \Rightarrow \frac{1}{r} \widehat{CD} = \frac{1}{r} \widehat{BD} \Rightarrow \widehat{CD} = \widehat{BD}$$

$$\Rightarrow CD = BD \Rightarrow D \text{ روی عمود منتهی } BC \text{ واقع است}$$

۱۴

می دانیم مماس های رسم شده از یک نقطه بر دایره، برابرند پس:



$$AB + CD = AM + MB + CP + PD$$

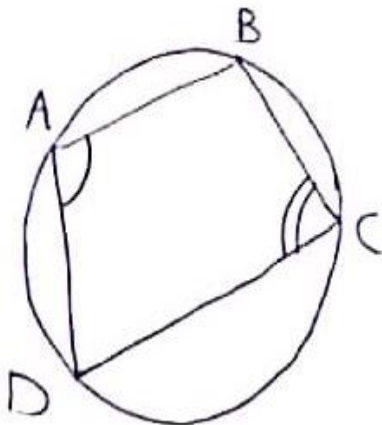
$$= AQ + BN + CN + DQ$$

$$= (AQ + DQ) + (BN + CN)$$

$$= AD + BC$$

۱۵

فرض کنیم چهارضلعی $ABCD$ محاطی است، بنابراین:



$$\hat{A} = \frac{1}{r} \widehat{BCD}, \quad \hat{C} = \frac{1}{r} \widehat{BAD} \Rightarrow$$

$$\hat{A} + \hat{C} = \frac{1}{r} (\widehat{BCD} + \widehat{BAD}) = \frac{1}{r} (360^\circ) = 180^\circ$$

$$\text{به روش مشابه} \Rightarrow \hat{B} + \hat{D} = 180^\circ$$

۱۶

امضاء:

نام و نام خانوادگی مصحح:

جمع بارم: ۲۰ نمره