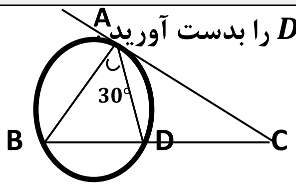
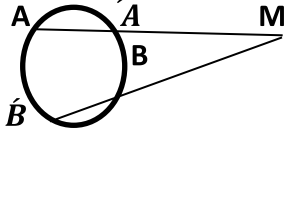
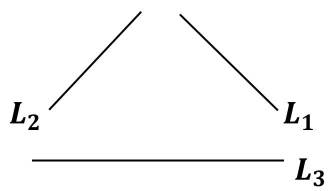
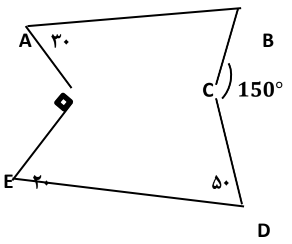
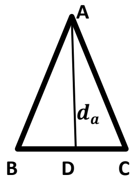
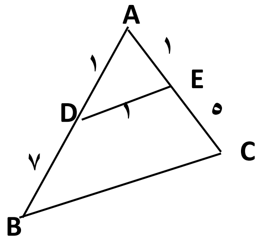
ردیف	سؤالات	بارم
۱	در شکل مقابل ، ACدر نقطه A بر دایره مماس ، AB=AC و $B\hat{A}D = 30°$. اندازه $D\hat{A}C$ را بدست آورید  	۱.۲۵
۲	دو دایره به شعاع های ۱ و ۳ مماس خارج اند . فاصله ی نقطه تلاقی دو مماس مشترک خارجی آنها تا نقطه تماس دو دایره را بدست آورید.	۱.۲۵
۳	ثابت کنید عمود منصف یک ضلع هر مثلث و نیمساز زاویه مقابل به آن ضلع ،یکدیگر را روی دایره محیطی مثلث قطع میکنند.	۱.۲۵
۴	اگر امتداد وتر های $A\acute{A}$ و $B\acute{B}$ از دایره یکدیگر را بیرون از دایره در نقطه M قطع کنند . ثابت کنید : $MA \times M\acute{A} = MB \times M\acute{B}$  	۱.۲۵

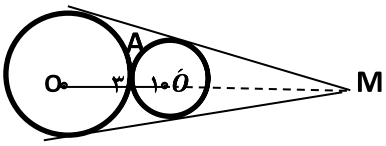
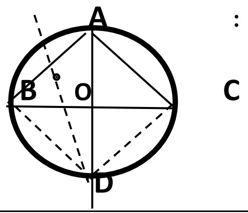
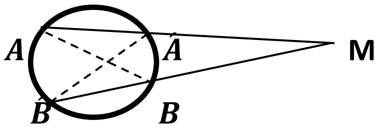
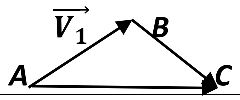
۵	**ثابت کنید ترکیب دو انتقال ، یک انتقال است.**	۱
۶	**ثابت کنید تجانس شیب خط را حفظ می کند.**	۱
۷	**مساله هرون (پیدا کردن کوتاهترین مسیر) را بیان و اثبات نمائید .**	۱.۵
۸	**مطابق شکل زیر ، سه خط L_1 و L_2 و L_3 در صفحه مفروض اند . پاره خطی به طول ۷ سانتی متر رسم کنید که دو سر آن روی L_1 و L_2 بوده و موازی L_3 باشد. (مراحل رسم را توضیح دهید.)** 	۱

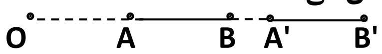
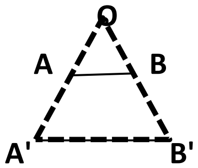
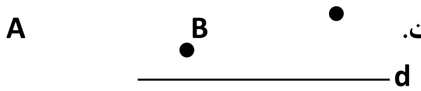
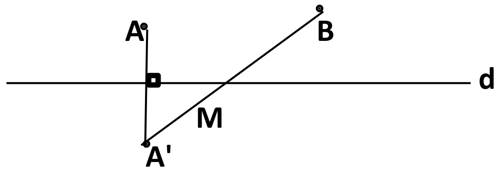
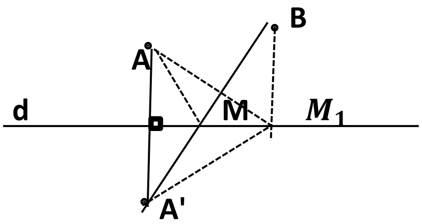
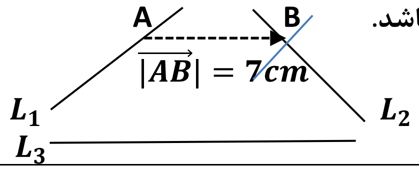
۹	زمینی به شکل زیر داریم . می خواهیم بدون آنکه محیط این زمین تغییر کند ، مساحتش را افزایش دهیم.  	۱.۵
۱۰	درست یا نادرستی احکام زیر را بررسی نمائید و در صورت نادرست بودن ، مثال نقض بیاورید. الف) دوران جهت شکل را حفظ می کند. ب) تجانس مساحت شکل را حفظ می کند. ج) اگر در تجانس $-1 < K < 0$ باشد ، آنگاه تجانس تبدیلی طولپا است.	۱
۱۱	الف) قضیه کسینوس ها در حالتی که $0 < \hat{A} < 90^\circ$ باشد ، ثابت نمائید. ب) مثلث ABC ، AB=$2\sqrt{2}$ و AC=$\sqrt{6}+\sqrt{2}$ و $\hat{A} = 60^\circ$ است . طول ضلع BC را بدست آورید.	۲
۱۲	در مثلثی به ضلع های ۴ و ۵ و ۶ نیمساز های داخلی و خارجی کوچکترین زاویه ی آن ، ضلع های مقابلش را به ترتیب در D و E قطع می کنند . اندازه DE را بدست آورید.	۱

۱۳	ثابت کنید در مثلث ΔABC ، طول نیمساز زاویه ی $\widehat{A}$ از رابطه زیر بدست می آید : $$d_a = \frac{2bc\cos\frac{\widehat{A}}{2}}{b+c}$$  	۱
۱۴	در شکل مقابل : الف) طول BC را بدست آورید. ب) مساحت چهارضلعی DECB رابیابید.  	۱.۵
۱۵	مساحت یک مثلث با اضلاعی به طول های ۱۳ ، ۱۴ ، ۱۵ را بیابید.	۱
۱۶	اگر در مثلث ABC ، m_1 ، m_2 ، m_3 اندازه های میانه باشند ، مطلوب است : الف) ثابت کنید : $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}\,(a^2 + b^2 + c^2)$ ب)در مثلث قائم الزاویه به طول اضلاع قائده ۳ و ۴ ، مجموع مربعات میانه ها را بدست آورید.	۱.۵

جمع بارم : ۲۰ نمره

راهنمای تصحیح

فرض می کنیم $D\hat{A}C = x$ که یک زاویه ی ظلی است . پس کمان $\widehat{AD} = 2x$ و $\hat{B}$ زاویه ای محاطی است. بنابراین : $\hat{B} = \frac{\widehat{AD}}{2} = \frac{2x}{2} = x \;\; , \;\; AB = AC \xrightarrow{ABC \text{ متساوی الساقین}} \hat{C} = x$ $\Delta ABC : x + x + 30 + x = 180 \;\to 3x = 150 \;\to x = 50$	۱
$\frac{OM}{\acute{O}M} = \frac{R}{\acute{R}} \to \frac{4+\acute{O}M}{\acute{O}M} = \frac{3}{1} \Rightarrow 4 + \acute{O}M = 3\acute{O}M \;\to\; \acute{O}M = 2$  $AM = A\acute{O} + \acute{P}M = 1 + 2 = 3$	۲
فرض می کنیم نیمساز زاویه ی $B\hat{A}C$ و دایره ی محیطی را در نقطه D قطع می کند . لذا :  $B\hat{A}D = C\hat{A}D \xrightarrow{\text{محاطی}} \widehat{BD} = \widehat{DC} \xrightarrow{\text{کمان ها برابر وتر برابر می شود}} \overline{BD} = \overline{DC}$ و این بدان معناست که فاصله ی نقطه D از دو نقطه ی B و C به یک اندازه است. بنابراین طبق تعریف عمودمنصف نقطه ی D روی عمودمنصف پاره خط BC قرار دارد.	۳
ابتدا وتر های $\acute{A}\acute{B}$ و AB را رسم می کنیم :  $B\hat{A}\acute{A} = \frac{\widehat{\acute{A}B}}{2}$ $B\hat{\acute{B}}\acute{A} = \frac{\widehat{\acute{A}B}}{2}$ $\Longrightarrow \begin{cases} B\hat{A}M = \acute{A}\hat{\acute{B}}M \\ \hat{M} = \hat{M} \text{ مشترک} \end{cases}$ $\Delta MBA = \Delta M\acute{A}\acute{B} \;\Rightarrow\; \frac{M\acute{A}}{MB} = \frac{M\acute{B}}{MA} \Longrightarrow MA \times M\acute{A} = MB \times M\acute{B}$	۴
بردار های $\overrightarrow{V_1}$ و $\overrightarrow{V_2}$ را مطابق شکل در نظر می گیریم . تبدیل T_1 انتقال با بردار $\overrightarrow{V_1}$ و تبدیل T_2 انتقال با بردار $\overrightarrow{V_2}$ است.  فرض می کنیم $T_1(A) = B$, $T_2(B) = C$. بنابراین $T_2(T_1(A)) = T_2(B) = C$. توجه داریم که $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ و $AB = \overrightarrow{V_1}$, و $BC = \overrightarrow{V_2}$ پس $AC = \overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_2}$. یعنی C انتقال یافته نقطه A تحت انتقال با بردار $T_1 o\, T_1 = \overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_1}$ است.  	۵

تجانس به مرکز O و نسبت K را در نظر می گیریم . تصویر پاره خط AB در این تجانس را بدست می آوریم . ثابت می کنیم تصویر پاره خط AB با خود پاره خط AB موازی است . دو حالت اتفاق می افتد.  الف)O ، A و B روی یک خط قرار دارند : در این حالت اگر 'A و 'B مجانس های A و B باشند واضح است که 'A و 'B روی خط AB قرار دارند. در نتیجه دو خط AB و 'A'B روی یک خط قرار دارند، پس باهم موازی اند. ب) نقطه O غیر واقع بر خط AB باشد : اگر 'A و 'B به ترتیب متجانس های A و B نسبت به O باشند لذا طبق تعریف تجانس $OA'=\|K\|\ OA$ و $OB'=\|K\|OB$ یعنی : $\|K\| = \frac{OB'}{OB} = \frac{OA'}{OA}$. پس طبق عکس قضیه تالس AB|| A'B'.  	۶
مساله هرون:در شکل مقابل دو نقطه ی A و B در یک طرف خط قرار دارند. روی خط d نقطه ای پیدا کنید که مجموع فاصله آن ها از A و B کمتر از سایر نقطه های دیگر روی خط d است.  حل : بازتاب نقطه ی A نسبت به خط d را 'A می نامیم . محل برخورد 'A'B با محور بازتاب (d) را M می نامیم . ثابت می کنیم M جواب مسئله است.  نقطه ی دلخواه دیگری مانند M_1 روی خط d انتخاب می کنیم. بنا به تعریف بازتاب ، خط d عمود منصف $\acute{A}A$ است، در نتیجه , $MA = M\acute{A}$, $A'M_1 = AM_1$ کافی است ثابت کنیم: $MA + MB <\ M_1A + M_1B$ در مثلث $A'M_1B$ بنابر نا برابری مثلثی داریم : $A'B < A'M_1 + M_1B$ یا $A'M + MB < \acute{A}M_1 + M_1B$ حال با توجه به مطالب مذکور داریم : $MA + MB < AM_1 +\ M_1B$  	۷
با استفاده از تبدیل انتقال ، خط L_1 را با یک بردار به اندازه ۷ سانتی متر و موازی L_3 انتقال می دهیم تا خط L_2 را در نقطه B قطع کند . سپس این نقطه را با همین بردار در خلاف جهت انتقال می دهیم تا خط L_1 را در نقطه A قطع کند . بنابراین با توجه به طولپا بودن تبدیل انتقال ، پاره خط AB جواب مسئله می باشد.  	۸

۹

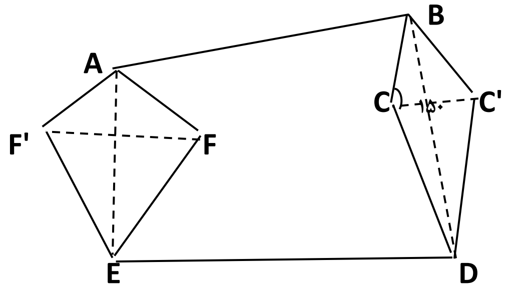
اگر بازتاب F نسبت به خط AE نقطه ی 'F بنامیم و بازتاب C نسبت به خط AB نقطه ی 'C بنامیم . آنگاه محیط چند ضلعی جدید 'ABC'DEF با محیط چند ضلعی اولیه برابر است ، زیرا 'AF=AF و 'EF=EF و 'BC=BC و 'CD=DC . پس اندازه ی حصارکشی زمین جدید با زمین قبلی فرقی ندارد ، ولی مساحت زمین جدید به اندازه ی چهارضلعی های 'BCDC و 'AFEF افزایش یافته است :

$$S_{AFEF'} = 2S_{AEF} = 2\left(\frac{1}{2}AF \times EF\right) = 30 \times 40 = 1200\, m^2$$

$$S_{BCDC'} = 2S_{BCD} = 2\left(\frac{1}{2}BC \times CD \sin 150^\circ\right) = 30 \times 50 \times \frac{1}{2} = 750 m^2$$

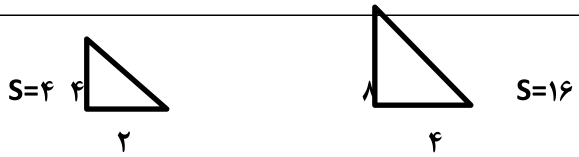
پس مساحت افزایش یافته برابر مجموع مساحت های به دست آمده ی اخیر است :

مساحت افزایش یافته $= 1200 + 750 = 1950 m^2$

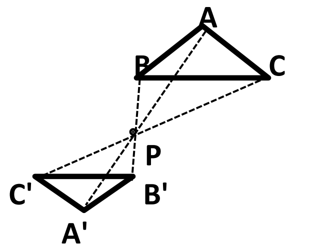


۱۰

الف) درست ب) نادرست



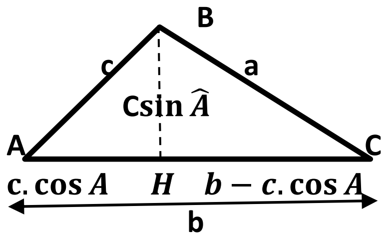
پ) نادرست K=$\frac{-1}{3}$



۱۱

الف) فرض می کنیم در مثلث ABC زاویه A حاده باشد .

AB=c , AC=b , BC=a



ارتفاع BH را رسم می کنیم. در این صورت با استفاده از رابطه های مثلثاتی می توانیم طول پاره خط های ایجاد شده را بدست آوریم.

$$\cos\widehat{A} = \frac{AH}{c} \to AH = c.\cos\widehat{A}$$

$$\sin\widehat{A} = \frac{BH}{c} \to BH = c.\sin\widehat{A}$$

$$CH = AC - AH = b - AH = b - c.\cos\widehat{A}$$

حال اگر قضیه فیثاغورس را در مثلث قائم الزاویه ΔBHC به کار ببریم:

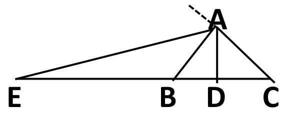
$$a^2 = BH^2 + HC^2 = (c\sin A)^2 + (b - c\cos A)^2 = c^2(\sin A)^2 + b^2 - 2bc\cos A + c^2(\cos A)^2 = c^2((\sin A)^2 + (\cos A)^2) + b^2 - 2bc\cos A = c^2 + b^2 - 2bc\cos A$$

ب)

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos A \Rightarrow BC^2 = (2\sqrt{2})^2 + (\sqrt{6} + \sqrt{2})^2 - 2(2\sqrt{2})(\sqrt{6} + \sqrt{2})\cos 60^\circ = 8 + 6 + 2 + 2\sqrt{12} - 2\sqrt{12} - 4 = 12 \Rightarrow BC = 2\sqrt{3}$$

۱۲

فرض می کنیم BC=۴ و AC=۶, AB=۵ و AD نیمساز زاویه ی داخلی A و AE نیمساز زاویه ی خارجی A باشد.



نیمساز داخلی AD = $\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}=\frac{5}{6}\xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}}\frac{BD}{BD+DC}=\frac{5}{5+6}\rightarrow BD=\frac{20}{11}$

نیمساز خارجی AE = $\frac{EB}{EC}=\frac{AB}{AC}=\frac{5}{6}\xrightarrow{\text{تفضیل در مخرج}}\frac{EB}{EB-EB}=\frac{5}{6-5}\rightarrow EB=20$

$DE=BD+EB=\frac{20}{11}+20=\frac{240}{11}$

۱۳

$$S_{ABC}=S_{ABD}+S_{ACD}\Rightarrow \frac{1}{2}\times b\times c\times\sin A=\frac{1}{2}c\times d_a\times\sin\frac{A}{2}+\frac{1}{2}\times b\times d_a\times\sin\frac{A}{2}$$

$$\Longrightarrow bc\ \sin A=d_a\times\sin\frac{A}{2}(c+b)$$

حالا با کمک اتحاد مثلثاتی $\sin A=2\sin\frac{A}{2}.\cos\frac{A}{2}$ داریم :

$$2bc\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}=d_a\times\sin\frac{A}{2}(b+c)\rightarrow 2bc\cos\frac{A}{2}=d_a(b+c)\rightarrow d_a=\frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}$$

۱۴

با توجه به این که مثلث ADE متساوی الساقین است پس $\widehat{DAE}=60°$ در نتیجه :

$$BC^2=AC^2+AB^2-2AC.AB.\cos A$$

$$BC^2=36+64-2\times6\times8\times\frac{1}{2}=52\ \Longrightarrow BC=2\sqrt{13}$$

$$S_{BCED}=S_{ABC}-S_{ADE}$$

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}.AB.AC.\sin A\ \Longrightarrow\ S_{ABC}=\frac{1}{2}\times8\times6\times\frac{\sqrt{3}}{2}=12\sqrt{3}$$

$$S_{ADE}=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\Longrightarrow S_{ADE}=\frac{\sqrt{3}}{4}\times1^2=S_{ADE}=\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$S_{BCED}=12\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{47}{4}\sqrt{3}$$

۱۵

بنا بر رابطه هرون برای محاسبه مساحت یک مثلث با اضلاع c,b,a و محیط ۲P داریم :

$$2P=13+14+15=42\ \Longrightarrow P=21$$

$$S=\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}\Longrightarrow S=\sqrt{21\times6\times7\times8}=\sqrt{7^2\times3^2\times4^2}=84$$

۱۶

الف) طبق قضیه میانه ها :

$$\left.\begin{array}{l} b^2+c^2=2m_a^2+\frac{a^2}{2}\\ a^2+c^2=2m_b^2+\frac{b^2}{2}\\ a^2+b^2=2m_c^2+\frac{c^2}{2}\end{array}\right]\xrightarrow{+}2(b^2+c^2+a^2)=2\left(m_a^2+m_b^2+m_c^2\right)+\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)$$

$$\frac{3}{2}(a^2+b^2+c^2)=2\left(m_a^2+m_b^2+m_c^2\right)\rightarrow\frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)=m_a^2+m_b^2+m_c^2$$

ب) $a^2=b^2+c^2\rightarrow a^2=3^2+4^2=25$

طبق الف : $m_a^2+m_b^2+m_c^2=\frac{3}{4}(25+25)=\frac{75}{2}$

جمع بارم : ۲۰ نمره