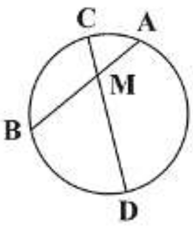
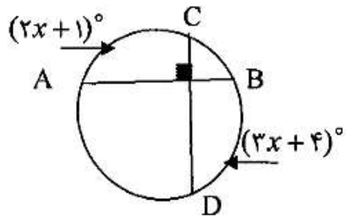
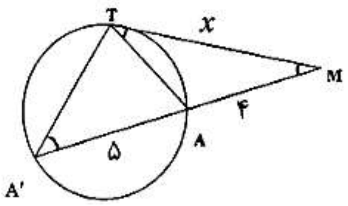
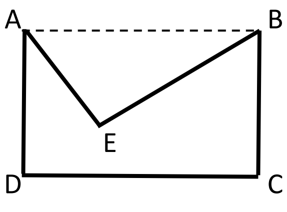
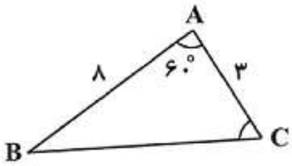
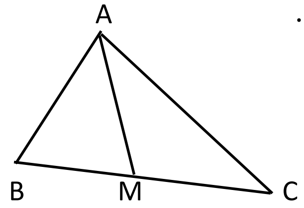
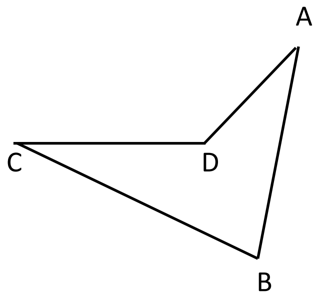
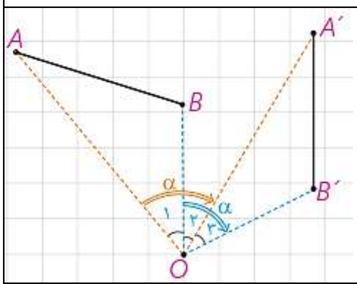
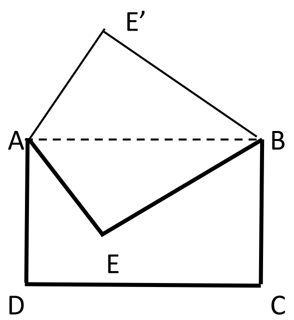
محل مهر و امضاء مدیر	نمره به حروف:	نمره به عدد:	نمره به حروف:	نمره تجدید نظر به عدد:
	تاریخ و امضاء:	نام دبیر:	تاریخ و امضاء:	نام دبیر:

ردیف	سؤالات	بارم
۱	اصطلاحات زیر را تعریف کنید. الف) تبدیل طولپا ب) نقطه ثابت تبدیل ج) زاویه محاطی د) زاویه ظلی	۲
۲	در دایره روبرو، وتر AB، وتر CD را به نسبت ۱ به ۴ تقسیم کرده است. اگر AB =۱۳ و CD =۱۵ باشد، حاصل AM چقدر است؟ 	۱
۳	مقدار x را در هر یک از شکل‌های زیر تعیین کنید. الف)  ب) 	۱/۵
۴	اگر طول مماس مشترک خارجی دو دایره مماس برون برابر $\sqrt{۳۲}$ و نسبت شعاع‌های آنها ۲ باشد، اندازه شعاع هر دایره را بیابید.	۱
۵	ضلع‌های قائمه مثلث قائم الزاویه‌ای برابر ۶ و ۸ است. سه شعاع دایره محاطی خارجی این مثلث را پیدا کنید.	۱
۶	ثابت کنید دوران یک تبدیل طولپاست.	۱/۵
۷	در شکل مقابل $A\hat{E}B = ۹۰^\circ$ و $A\hat{B}E = ۳۰^\circ$ و $AB = ۶$ است. ماکزیمم مساحت این شکل را بدون تغییر محیط و تعداد اضلاع با رسم افزایش دهید. مساحت چقدر افزایش می یابد؟ 	۱
۸	دایره‌ای به شعاع ۳ سانتی‌متر را در نظر بگیرید. تجانس این دایره را با نسبت‌های $k = -\frac{۱}{۳}$ و $k = ۲$ به مرکز دایره، رسم نمایید. مساحت بین دو دایره جدید را نیز بدست آورید.	۱/۵
۹	در شکل زیر فاصله دو نقطه A و B از خط d برابر ۲ و ۷ طول پاره خط AB برابر ۱۳ است. طول کوتاه‌ترین مسیر MA+MB که M روی خط d است، چقدر است؟ 	۱/۵
۱۰	قضیه سینوس‌ها را بیان و ثابت نمایید.	۱/۵

ردیف	سؤالات	بارم
۱۱	در شکل مقابل، مقدار **sin(C)** چقدر است؟ 	۱/۵
۱۲	**قضیه میانه‌ها: در مثلث ABC، میانه AM را رسم کرده‌ایم** ($MB = MC = \frac{a}{۲}$). **رابطه زیر را ثابت نمایید: (AC = b ، AB = c)** $$b^{۲} + c^{۲} = ۲AM^{۲} + \frac{a^{۲}}{۲}$$ 	۱/۵
۱۳	**در مثلث ABC، AB = ۴ و AC = ۷ و BC = ۱۰ است. طول نیمساز زاویه داخلی A را بدست آورید.**	۱
۱۴	**مساحت مثلثی به اضلاع ۵ و ۸ و ۱۱ را حساب کنید.**	۱
۱۵	**در شکل روبرو، مقدار DC = AD = ۷ ، BC = ۱۳ و AB = ۱۱ و** $A\widehat{D}C = ۱۲۰°$ **می باشد. اندازه زاویه B و مساحت چهارضلعی را پیدا کنید.** 	۱/۵

جمع بارم : ۲۰ نمره

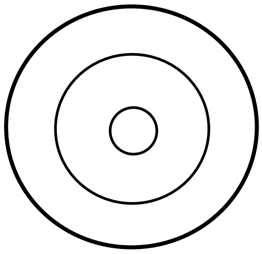
ردیف	راهنمای تصحیح	محل مهر یا امضاء مدیر
۱	**الف) تبدیلی که در آن طول پاره خط حفظ می شود.** **ب) نقطه‌ای را که تبدیل یافته آن بر خود آن نقطه منطبق باشد.** **پ) زاویه ای که رأس آن روی محیط دایره و اضلاع آن وتر دایره هستند.** **ت) زاویه ای که رأس آن روی محیط دایره و یکی از اضلاع آن وتر دایره و ضلع دیگر مماس بر دایره هست.**	
۲	$\begin{cases} CM + DM = ۱۵ \\ DM = ۴CM \end{cases} \Rightarrow CM = ۳\ , DM = ۱۲$ $AM \times MB = CM \times MD \Rightarrow AM \times (۱۳ - AM) = ۳ \times ۱۲ \Rightarrow AM = ۴ , MB = ۹$	
۳	الف) $\frac{۲x+۱+۳x+۴}{۲} = ۹۰^\circ \Rightarrow x = ۳۵^\circ$ ب) $TM^۲ = MA \times MA' \Rightarrow x^۲ = ۴ \times ۹ \Rightarrow x = ۶$	
۴	$R_۱ = ۲R_۲ \Rightarrow TT' = \sqrt{d^۲ - (R_۱ - R_۲)^۲} \Rightarrow ۳۲ = (R_۱ + R_۲)^۲ - (R_۱ - R_۲)^۲ = ۸R_۲^۲ \Rightarrow R_۲ = ۲, R_۱ = ۴$	
۵	فرض کنید ABC یک مثلث قائم الزاویه با زاویه قائمه A باشد. در نتیجه b = ۶ و c = ۸. طبق قضیه فیثاغورث a = ۱۰. بنابراین مساحت این مثلث $S = \frac{۶\times۸}{۲} = ۲۴$ و محیط آن $۲P = ۶ + ۸ + ۱۰ = ۲۴ \Rightarrow P = ۱۲$ در نتیجه: $r_a = \frac{S}{P-a} = \frac{۲۴}{۱۲-۱۰} = ۱۲$ $r_b = \frac{S}{P-b} = \frac{۲۴}{۱۲-۶} = ۴$ $r_c = \frac{S}{P-c} = \frac{۲۴}{۱۲-۸} = ۶$	
۶	**دو مثلث AOB و AOB' طبق حالت دو ضلع و زاویه بین همنهشت هستند بنابر اجزای متناظر نتیجه می شود: $AB = A'B$.**  	
۷	 $\begin{cases} AE = \frac{AB}{۲} = ۳ \\ BE = \frac{AB\sqrt{۳}}{۲} = ۳\sqrt{۳} \end{cases} \Rightarrow S = ۲ \times \frac{AE \times BE}{۲} = ۹\sqrt{۳}$	

۸

شعاع دایره کوچک: ۱

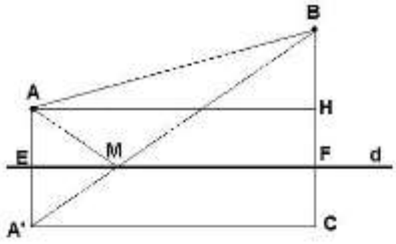
شعاع دایره بزرگ: ۶

$$S = ۳۶\pi - \pi = ۳۵\pi$$



۹

قرینه A را نسبت به خط d بدست می آوریم. مسیر AM+MB کوتاهترین مسیر مسئله می باشد که طولش با پاره خط $A'B$ برابر است.



$$AB^{۲} = AH^{۲} + HB^{۲} \Rightarrow ۱۳^{۲} = AH^{۲} + ۵^{۲} \Rightarrow AH = ۱۲ \Rightarrow AH' = ۱۲$$

$$A'B^{۲} = A'C^{۲} + BC^{۲} \Rightarrow A'B^{۲} = ۱۲^{۲} + ۹^{۲} \Rightarrow AM + MB = A'B = ۱۵$$

۱۰

در مثلث ABC، با اضلاع $BC = a$ ، $AC = b$ **و** $AB = c$ **داریم:**

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = ۲R$$

که R شعاع دایره محیطی مثلث است. اثبات صفحه ۶۴ کتاب درسی

۱۱

$$a^{۲} = b^{۲} + c^{۲} - ۲bc\,cosA = ۳^{۲} + ۸^{۲} - ۲ \times ۳ \times ۸ \times \frac{۱}{۲} = ۴۹ \Rightarrow a = ۷$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow \frac{۷}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}} = \frac{۸}{\sin C} \Rightarrow \sin C = \frac{۴\sqrt{۳}}{۷}$$

۱۲

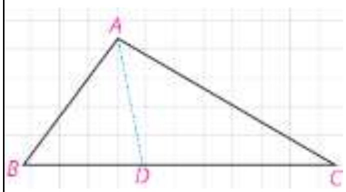
باتوجه به قضیه کسینوسها داریم:

$$c^{۲} = BM^{۲} + AM^{۲} - ۲BM \times AM\,cosM_{۱}$$

$$b^{۲} = CM^{۲} + AM^{۲} - ۲CM \times AM\,cos(۱۸۰ - M_{۱}) = BM^{۲} + AM^{۲} + ۲BM \times AM\,cosM_{۱}$$

$$b^{۲} + c^{۲} = BM^{۲} + AM^{۲} + BM^{۲} + AM^{۲} = ۲AM^{۲} + \frac{a^{۲}}{۲}$$

۱۳



$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{BD}{۱۰ - BD} = \frac{۴}{۷} \Rightarrow BD = \frac{۴۰}{۱۱}$$

$$AD^{۲} = AB \times AC - BD \times DC = ۷ \times ۴ - \frac{۴۰}{۱۱} \times \frac{۷۰}{۱۱} \Rightarrow AD = \frac{\sqrt{۵۸۸}}{۱۱}$$

۱۴

بنابر فرمول هرون داریم:

$$۲P = a + b + c = ۵ + ۸ + ۱۱ = ۲۴ \Rightarrow P = ۱۲$$

$$S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)} = \sqrt{۱۲ \times ۷ \times ۴ \times ۱} = ۴\sqrt{۲۱}$$

۱۵	**B را به D وصل می کنیم. مثلث BCD متساوی الساقین است و با توجه به اندازه زاویه C، اندازه دو زاویه دیگر هرکدام ۳۰ درجه است. ارتفاع CH را رسم می کنیم. در مثلث قائم الزاویه با زاویه ۳۰ درجه داریم:** $CH = \frac{۱}{۲}CD = \frac{۷}{۲}$ **مساحت مثلث BCD را به دو روش حساب می کنیم:** $\left.\begin{array}{l} S = \frac{۱}{۲}\times\frac{۷}{۲}\times BD = \frac{۷}{۴}BD \\ S = \frac{۱}{۲}\times ۷\times ۷\times \sin ۱۲۰ = \frac{۴۹\sqrt{۳}}{۴} \end{array}\right\} \Rightarrow BD = ۷\sqrt{۳}$ $P_{ABD} = \frac{۱۱+۱۳+۷\sqrt{۳}}{۲} = ۱۲+\frac{۷\sqrt{۳}}{۲}$ $S_{ABD} = \sqrt{(۱۲+\frac{۷\sqrt{۳}}{۲})(۱۲+\frac{۷\sqrt{۳}}{۲}-۷\sqrt{۳})(۱۲+\frac{۷\sqrt{۳}}{۲}-۱۱)(۱۲+\frac{۷\sqrt{۳}}{۲}-۱۳)} = \frac{۱۴۳\sqrt{۳}}{۴}$ $S_{ABD} = \frac{۱}{۲}\times ۱۱\times ۱۳\times \sin A \Rightarrow \sin A = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow \hat{A} = ۶۰^\circ$ $S_{ABCD} = S_{ABD} - S_{BCD} = \frac{۱۴۳\sqrt{۳}}{۴} - \frac{۴۹\sqrt{۳}}{۴} = \frac{۹۴\sqrt{۳}}{۴}$