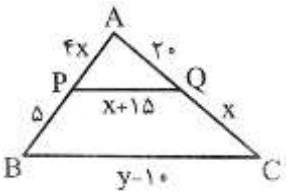
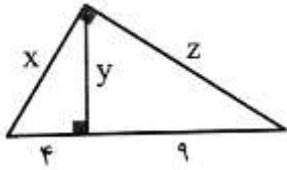


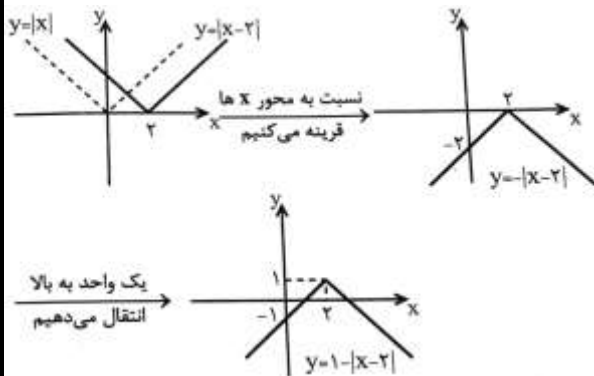
ردیف	سؤالات	محل مهر یا امضاء مدیر
۱	دو خط به معادله‌های $2x + 3y = 5$ و $ax - 2y = 3$ را در نظر بگیرید. a را طوری بیابید که: الف) این دو خط با هم موازی باشند. ب) این دو خط بر هم عمود باشند.	
۲	مقدار m را چنان بیابید که مجموع ریشه‌های معادله $2x^2 - (m+1)x - 3m = 0$ برابر با ۳ باشد.	
۰/۵	اگر $\frac{a}{5} = \frac{b}{7} = \frac{c}{13}$ ، آنگاه حاصل عبارت $\frac{7a-4b}{2c}$ را به دست آورید.	
۱	در شکل زیر، PQ با BC موازی است، مقادیر x و y را محاسبه کنید.	
۱	در شکل زیر، مقادیر مجهول را محاسبه کنید.	
۱	تابع $f = \{(m^2 + 2, 5), (n^3 + 1, 4)\}$ مفروض است. m و n را طوری تعیین کنید که برد وارون f ، $\{-7, 18\}$ باشد.	
۱	اگر تابع خطی f از نقاط $(2, 1)$ و $(4, 5)$ عبور کند، ضابطه‌ی تابع وارون آن را به دست آورید.	
۰/۵	با استفاده از نمودار $f(x) = x $ نمودار تابع $y = 1 - x - 2 $ را رسم کنید.	
۱	اگر $\sin \alpha = \frac{-\sqrt{5}}{5}$ و انتهای کمان α در ربع سوم باشد، مقدار $\tan \alpha$ را به دست آورید.	
۱	مقدار عددی عبارت $\cos(-150^\circ)\cos 420^\circ + \sin 330^\circ\sin 300^\circ$ را به دست آورید.	
۱	اگر $\frac{\sin(\frac{\pi}{3} + \alpha)}{2\sin(\alpha - 9\pi) + \cos(\alpha - \frac{5\pi}{3})} = \frac{1}{2}$ ، مقدار $\tan \alpha$ را به دست آورید.	
۱	هر یک از معادله‌های نمایی زیر را حل کنید. الف) $2^{2x+1} = 32$ ب) $9x^2 + 2 = (\frac{1}{27})^{2x}$	
۱	اگر $\log_c a = \frac{3}{4}$ و $\log_c b = \frac{7}{9}$ باشد، مقدار $\log_b a^3 \sqrt{b}$ را بیابید.	
۱/۵	حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید. الف) $2 \log_5 3 - \log_5 x = \log_5 3 + \log_5 9$ ب) $4(\log_2 \sqrt{5} - \log_2 2)$	

ردیف	محل مهر یا امضاء مدیر	ادامه ی سوالات	نمره
۱		<p>نمودار تابع f به صورت زیر داده شده است. با توجه به نمودار، حاصل حاصل حدهای خواسته شده را به دست آورید.</p> <p>A) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ B) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ C) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ D) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$</p>	۱۵
۰/۵		<p>تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} ax + 1 & ; x > 1 \\ 2x & ; x = 1 \\ bx - 2 & ; x < 1 \end{cases}$ داده شده است. a و b را چنان بیابید که:</p> <p>$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$ و $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2$</p>	۱۶
۱		<p>حاصل حدهای زیر را به دست آورید.</p> <p>A) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{3x^2 - 13x - 10}{x^2 - 6x + 5}$ B) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\cos^2 x}$</p>	۱۷
۱		<p>مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که تابع زیر در نقطه‌ی $x = 2$ پیوسته باشد.</p> <p>$f(x) = \begin{cases} \frac{x + 2b}{x^2 - 2} & ; x > 2 \\ 2a + x + 1 & ; x = 2 \\ 2b + 5 & ; x < 2 \end{cases}$</p>	۱۸
۱		<p>اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند، به طوری که $P(A B) = \frac{1}{3}$ و $P(B) = \frac{1}{3}$، آنگاه $P(A \cup B)$ را بیابید.</p>	۱۹
۱		<p>یک تاس و یک سکه را با هم پرتاب می‌کنیم:</p> <p>الف) فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی را بنویسید.</p> <p>ب) پیشامد A که در آن تاس عدد فرد بیاید را مشخص کنید.</p> <p>ج) پیشامد B که در آن سکه «رو» و تاس عدد کوچکتر از پنج بیاید را مشخص کنید.</p> <p>د) آیا دو پیشامد A و B مستقل‌اند؟ چرا؟</p>	۲۰
۱		<p>اگر میانگین ده داده‌ی آماری برابر ۵ و ضریب تغییرات ۳ باشد:</p> <p>الف) واریانس داده‌ها کدام است؟</p> <p>ب) اگر دو داده‌ی ۵ به داده‌های قبلی اضافه شود، ضریب تغییرات ۱۲ داده را بیابید.</p>	۲۱

ردیف	راهنمای تصحیح	محل مهر یا امضاء مدیر
۱	<p>الف) باید شیب‌های L_1, L_2 با هم برابر باشد تا این دو خط با هم موازی باشند:</p> $L_1: 2x + 3y = 5 \rightarrow 3y = -2x + 5 \rightarrow y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3} \rightarrow m_1 = -\frac{2}{3}$ $L_2: ax - 2y = 3 \rightarrow -2y = -ax + 3 \rightarrow y = \frac{a}{2}x - \frac{3}{2} \rightarrow m_2 = \frac{a}{2}$ $m_1 = m_2 \rightarrow -\frac{2}{3} = \frac{a}{2} \rightarrow a = -\frac{4}{3}$ <p>ب) باید حاصلضرب شیب‌های L_1, L_2 برابر (-1) باشد تا این دو خط بر هم عمود باشند:</p> $m_1 \cdot m_2 = -1 \rightarrow \left(-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{a}{2}\right) = -1 \rightarrow \frac{a}{3} = 1 \rightarrow a = 3$	
۲	$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} \Rightarrow -\frac{-(m+1)}{2} = 3 \Rightarrow \frac{m+1}{2} = 3 \Rightarrow m = 5$	
۳	$\begin{cases} \frac{a}{5} = x \Rightarrow a = 5x \\ \frac{b}{7} = x \Rightarrow b = 7x \\ \frac{c}{13} = x \Rightarrow c = 13x \end{cases} \Rightarrow \frac{7a - 4b}{2c} = \frac{7(5x) - 4(7x)}{2(13x)} = \frac{35x - 28x}{26x} = \frac{7x}{26x} = \frac{7}{26}$	
۴	<p>با توجه به قضیه تالس داریم:</p> $\frac{AP}{BP} = \frac{AQ}{CQ} \Rightarrow \frac{4x}{5} = \frac{20}{x} \Rightarrow 4x^2 = 100 \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x = 5$ <p>با توجه به تعمیم قضیه تالس داریم:</p> $\frac{AQ}{AC} = \frac{PQ}{BC} \Rightarrow \frac{20}{20+x} = \frac{x+15}{y-10} \rightarrow \frac{20}{25} = \frac{20}{y-10} \Rightarrow y-10 = 25 \Rightarrow y = 35$	
۵	<p>در مثلث ABC می‌توان نوشت:</p> $AH^2 = BH \times CH \Rightarrow y^2 = 4 \times 9 \Rightarrow y = 2 \times 3 = 6$ <p>حال با به‌کار بردن قضیه فیثاغورس در هر دو مثلث قائم‌الزاویه ABH و ACH داریم:</p> $ABH: AB^2 = AH^2 + BH^2 \Rightarrow x^2 = 6^2 + 4^2 \Rightarrow x = \sqrt{52} = \sqrt{4 \times 13} = 2\sqrt{13}$ $ACH: AC^2 = AH^2 + CH^2 \Rightarrow z^2 = 6^2 + 9^2 \Rightarrow z = \sqrt{117}$	
۶	$f = \{(m^x + 2, 5), (n^x + 1, 4)\}$ $f^{-1} = f = \{(5, m^x + 2), (4, n^x + 1)\} \Rightarrow R_{f^{-1}} = \{m^x + 2, n^x + 1\}$ <p>اگر $\{m^x + 2, n^x + 1\} = \{-7, 18\}$ از آنجا که $m^x + 2$ همواره مثبت است باید برابر با ۱۸ و $n^x + 1$ برابر با (-7) باشد، پس:</p> $\begin{cases} m^x + 2 = 18 \Rightarrow m^x = 16 \Rightarrow m = \pm 2 \\ n^x + 1 = -7 \Rightarrow n^x = -8 \Rightarrow n^x = (-2)^x \Rightarrow n = -2 \end{cases}$	

$$\{(2,1) \in f\} \rightarrow y-1 = \frac{5-1}{4-2}(x-2) \Rightarrow y = f(x) = 2x-3$$

$$y = 2x-3 \Rightarrow y+3 = 2x \Rightarrow x = \frac{y+3}{2} \rightarrow y = \frac{x+3}{2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+3}{2}$$

در ربع سوم: $\sin \alpha < 0, \cos \alpha < 0$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \rightarrow \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1 \rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5} \rightarrow \cos \alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{-\frac{\sqrt{5}}{5}}{-\frac{2\sqrt{5}}{5}} = \frac{1}{2}$$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

$$\cos 150^\circ = \cos(180^\circ - 30^\circ) \rightarrow \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha \rightarrow -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 420^\circ = \cos(360^\circ + 60^\circ) \rightarrow \cos(360^\circ + \alpha) = \cos \alpha \rightarrow \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\sin 330^\circ = \sin(360^\circ - 30^\circ) \rightarrow \sin(360^\circ - \alpha) = -\sin \alpha \rightarrow -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\sin 300^\circ = \sin(360^\circ - 60^\circ) \rightarrow \sin(360^\circ - \alpha) = -\sin \alpha \rightarrow -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos(-150^\circ)\cos 420^\circ + \sin 330^\circ \sin 300^\circ = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0$$

ابتدا هر یک از نسبت‌های مثلثاتی داده شده را بر حسب نسبت‌های مثلثاتی کمان α می‌نویسیم:

$$\sin\left(\frac{3\pi}{4} + \alpha\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{4} + \alpha\right) = -\cos \alpha$$

$$\sin(\alpha - 9\pi) = -\sin(9\pi - \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos\left(\alpha - \frac{5\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{4} - \alpha\right) = \sin \alpha$$

$$\frac{\sin\left(\frac{3\pi}{4} + \alpha\right)}{2\sin(\alpha - 9\pi) + \cos\left(\alpha - \frac{5\pi}{4}\right)} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{-\cos \alpha}{2 \times (-\sin \alpha) + \sin \alpha} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{-\cos \alpha}{-\sin \alpha} = \frac{1}{2} \Rightarrow \cot \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\cot = \frac{1}{\tan \alpha} \Rightarrow \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{1}{2} \Rightarrow \tan \alpha = 2$$

$$\text{الف) } 2^{2x+1} = 32 \Rightarrow 2^{2x+1} = 2^5 \Rightarrow 2x+1 = 5 \Rightarrow x = 2$$

$$\text{ب) } 9^{x^2+2} = \left(\frac{1}{27}\right)^{2x} \Rightarrow (3^2)^{x^2+2} = (3^{-3})^{2x} \Rightarrow 3^{2x^2+4} = 3^{-6x} \Rightarrow 2x^2 + 4 = -6x$$

$$2x^2 + 6x + 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -2 \end{cases}$$

<p>با استفاده از ویژگی تغییر مبنا $\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$ داریم:</p> $\log_{b^r} a^r \sqrt{b} = \frac{\log_c a^r \sqrt{b}}{\log_c b^r} = \frac{\log_c a^r + \log_c \sqrt{b}}{r \log_c b} = \frac{r \log_c a + \frac{1}{r} \log_c b}{r \log_c b} = \frac{r(\frac{r}{r}) + \frac{1}{r}(\frac{r}{r})}{r(\frac{r}{r})} = \frac{r+1}{r}$	۱۳
<p>الف) $2 \log_{\Delta} 3 - \log_{\Delta} x = \log_{\Delta} 3 + \log_{\Delta} 9$</p> $\Rightarrow 2 \log_{\Delta} 3 - \log_{\Delta} 3 - \log_{\Delta} 9 = \log_{\Delta} x \Rightarrow \log_{\Delta} 3 - \log_{\Delta} 9 = \log_{\Delta} x \Rightarrow \log_{\Delta} \frac{3}{9} = \log_{\Delta} x \Rightarrow x = \frac{1}{3}$ <p>ب) $4(\log_r \sqrt{\Delta} - \log_r 3) = (r^2)(\log_r \sqrt{\Delta} - \log_r 3) = r^2(\log_r \frac{\sqrt{\Delta}}{3}) = r^2 \log_r (\frac{\sqrt{\Delta}}{3})^r = (\frac{\sqrt{\Delta}}{3})^r = \frac{\Delta}{9}$</p>	۱۴
<p>A) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2$</p> <p>B) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$</p> <p>C) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) =$ حد ندارد</p> <p>D) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) =$ وجود ندارد</p>	۱۵
<p>$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (ax + 1) = a(1) + 1 = 2 \Rightarrow a = 1$</p> <p>$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (bx - 2) = b(1) - 2 = 1 \Rightarrow b = 3$</p>	۱۶
<p>A) $\lim_{x \rightarrow \Delta} \frac{rx^r - 13x - 10}{x^r - 6x + 5} = \lim_{x \rightarrow \Delta} \frac{(rx + 2)(x - \Delta)}{(x - 1)(x - \Delta)} = \frac{r(\Delta) + 2}{\Delta - 1} = \frac{17}{4}$</p> <p>B) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{r}} \frac{1 - \sin x}{\cos^r x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{r}} \frac{1 - \sin x}{(1 - \sin x)(1 + \sin x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{r}} \frac{1}{1 + \sin x} = \frac{1}{2}$</p>	۱۷
<p>$f(r) = ra + r + 1 = ra + 3$</p> <p>$\lim_{x \rightarrow r^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow r^+} \frac{x + rb}{x^r - r} = \frac{r + rb}{r} = b + 1$</p> <p>$\lim_{x \rightarrow r^-} f(x) = rb + 5$</p> <p>$ra + 3 = b + 1 = rb + 5 \Rightarrow b + 1 = rb + 5 \Rightarrow b = -4$</p> <p>$ra + 3 = rb + 5 \Rightarrow ra + 3 = -3 \Rightarrow a = -3$</p>	۱۸
<p>دو پیشامد مستقل: $P(A B) = P(A) = \frac{1}{3}$</p> <p>$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$</p> <p>$P(A \cup B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{5}{9}$</p>	۱۹
<p>الف) $S = \{(1, r), (2, r), (3, r), (4, r), (5, r), (6, r), (1, p), (2, p), (3, p), (4, p), (5, p), (6, p)\}$</p> <p>ب) $A = \{(1, r), (3, r), (5, r), (1, p), (3, p), (5, p)\}$</p> <p>ج) $B = \{(1, r), (2, r), (3, r), (4, r)\}$</p> <p>د) $P(A) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$</p> <p>$A \cap B = \{(1, r), (3, r)\} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$</p> <p>$\begin{cases} P(A \cap B) = \frac{1}{6} \\ P(A) \times P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \end{cases} \Rightarrow$ دو پیشامد مستقل از هم اند</p>	۲۰

$$cv = \frac{\sigma}{\bar{X}} \rightarrow 3 = \frac{\sigma}{5} \rightarrow \sigma = 15$$

ب) مجموع ۱۰ داده‌ی اولیه را حساب می‌کنیم:

$$\bar{X} = \frac{x_1 + \dots + x_{10}}{10} \rightarrow 5 = \frac{x_1 + \dots + x_{10}}{10} \rightarrow x_1 + \dots + x_{10} = 50$$

حال با دو داده‌ی ۵ محاسبه می‌کنیم:

$$\bar{X}' = \frac{x_1 + \dots + x_{10} + 5 + 5}{12} \rightarrow \bar{X}' = \frac{50 + 5 + 5}{12} = 5$$

حال رابطه‌ی انحراف معیار را برای ۱۰ داده‌ی اولیه می‌نویسیم:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{X})^2 + \dots + (x_{10} - \bar{X})^2}{10}} \rightarrow 15 = \sqrt{\frac{(x_1 - 5)^2 + \dots + (x_{10} - 5)^2}{10}} = 2250$$

رابطه‌ی انحراف معیار را برای ۱۲ داده‌ی جدید می‌نویسیم:

$$\sigma' = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{X})^2 + \dots + (x_{10} - \bar{X})^2 + (\Delta - \bar{X})^2 + (\Delta - \bar{X})^2}{12}} \rightarrow \sigma' = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{X})^2 + \dots + (x_{10} - \bar{X})^2 + 0 + 0}{12}}$$

$$\sigma' = \sqrt{\frac{2250}{12}} = \sqrt{187.5}$$

رابطه‌ی ضریب تغییرات را می‌نویسیم:

$$cv' = \frac{\sigma'}{\bar{X}'} = \frac{\sqrt{187.5}}{5}$$