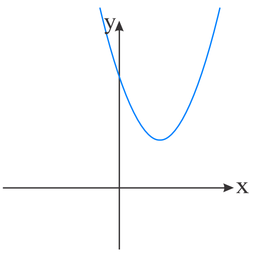
۱ اگر تابع $f(x)=\log_{2}^{(ax-1)}+b$ از نقاط $A(3\,,\,8)$ و $B(11,\,10)$ عبور کند، مقدار $f^{-1}(12)$ را به دست آورید.

جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید.

۲ برای عدد حقیقی a $(a\neq 1)$ و عدد طبیعی n، حاصل عبارت $1+a+a^2+\ldots+a^{n-1}$ برابر است با ....

۳ ساده‌شدهٔ عبارت $\sqrt{30-12\sqrt{6}}$ برابر است با ....

۴ شکل زیر، نمودار سهمی $y=ax^2+bx+c$ است. علامت b .... است.



۵ به‌کمک رسم نمودار، نشان دهید توابع زیر در چه نقاطی حد ندارند؟

الف

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & ;x^2>1 \\ 2x-1 & ;x^2<1 \end{cases}$$

۶ نمودار توابع زیر را رسم کنید و از روی آن، نقاط فاقد حد تابع داده‌شده را پیدا کنید.

الف

$$f(x)=\frac{|x|}{x}-\frac{x^2-9}{|x-3|}$$

ب

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x} & ;x^2\geq |x| \\ -\dfrac{1}{x} & ;x^2<|x| \end{cases}$$

مقدار حدهای زیر را بیابید.

۷

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^4-x-1}{x^3-x}$$

۸

$$\lim_{x\to \frac{-3}{2}^-}[5-2x]$$

۹ تابع $f(x)=3^x$ را در نظر بگیرید.

الف برد تابع را بنویسید.

ب وارون تابع $f(x)$ چیست؟

۱۰ اگر $\frac{\pi}{6}<x<\frac{\pi}{2}$ و $A=\sin 3x+\cos 3x$، حدود A را به دست آورید.

۱۱ اگر $\sin\alpha=\frac{3}{5}$ و $\cos\beta=\frac{5}{13}$ و α منفرجه و β حاده باشند، حاصل $\sin(\alpha+\beta)$ را به دست آورید.

۱۲ نمودار تابع درجهٔ دوم $f(x)=ax^2+(a-2)x+a-1$ از ناحیهٔ اول دستگاه مختصات نمی‌گذرد. حدود a را به دست آورید.

۱۳ معادلهٔ درجهٔ دومی بنویسید که ریشه‌هایش $\sin^4 15^\circ$ و $\cos^4 15^\circ$ باشد.

۱۴ ثابت کنید:

الف

$$4\cos^8 x-4\sin^8 x+\sin 2x\sin 4x=4\cos 2x$$

ب

$$\left(\frac{\sin x-\tan\frac{x}{2}}{\cos x}\right)^2\left(\frac{2\sin x+\sin 2x}{2\sin x-\sin 2x}\right)=1$$

پ

$$(2\cos x-1)(2\cos x+1)(2\cos 2x-1)-2\cos 4x=1$$

حدود زیر را محاسبه کنید.

۱۵

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{2-\sqrt{4-x^2}}}{\sin 2x}$$

۱۶

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{2\sin x-\sqrt{3}}{3x-\pi}$$

۱ دو نقطهٔ $A(۳\,,\,۸)$ و $B(۱۱,\,۱۰)$ روی تابع $f(x)=\log_۲^{((ax-۱)+b)}$ قرار دارند، پس:

$$A(۳\,,\,۸)\in f \Rightarrow \log_۲^{(۳a-۱)}+b=۸ \Rightarrow b=۸-\log_۲^{(۳a-۱)}$$
$$B(۱۱,\,۱۰)\in f \Rightarrow \log_۲^{(۱۱a-۱)}+b=۱۰ \Rightarrow b=۱۰-\log_۲^{(۱۱a-۱)}$$

دو مقدار به‌دست‌آمده برای b را باهم برابر قرار می‌دهیم:

$$۸-\log_۲^{(۳a-۱)}=۱۰-\log_۲^{(۱۱a-۱)} \Rightarrow \log_۲^{(۱۱a-۱)}-\log_۲^{(۳a-۱)}=۲$$
$$\log_۲^{(\frac{۱۱a-۱}{۳a-۱})}=۲ \Rightarrow \frac{۱۱a-۱}{۳a-۱}=۲^۲ \Rightarrow ۱۲a-۴=۱۱a-۱ \Rightarrow a=۳$$

$a=۳$ را در معادلهٔ اول قرار می‌دهیم تا b به دست آید:

$$b=۸-\log_۲^{(۹-۱)}=۸-۳=۵$$

پس ضابطهٔ f به‌صورت $f(x)=\log_۲^{(۳x-۱)}+۵$ است. برای به دست آوردن $f^{-۱}(۱۲)$، باید معادلهٔ زیر را حل کنیم:

$$\log_۲^{(۳x-۱)}+۵=۱۲ \Rightarrow \log_۲^{(۳x-۱)}=۷ \Rightarrow ۳x-۱=۲^۷ \Rightarrow ۳x=۱۲۹ \Rightarrow x=۴۳$$
$$\Rightarrow f^{-۱}(۱۲)=۴۳$$

پاسخ سؤالات ۲ تا ۴

۲ عبارت $۱+a+a^۲+\ldots+a^{n-۱}$ مجموع n جملهٔ اول یک دنبالهٔ هندسی است با قدر نسبت (نسبت مشترک) a و جملهٔ اول ۱، پس:

$$S_n=\frac{a(۱-q^n)}{۱-q}=\frac{۱\times(۱-a^n)}{۱-a}=\frac{۱-a^n}{۱-a}$$

۳ برای اینکه زیر رادیکال، اتحاد مربع دوجمله‌ای ظاهر شود باید a و b را طوری محاسبه کنیم که:

$$\begin{cases} a^۲+b^۲=۳۰ \\ ۲ab=۱۲\sqrt{۶} \end{cases} \Rightarrow a=۳\sqrt{۲}\ ,\ b=۲\sqrt{۳}$$

باید حالت‌های گوناگون را آزمایش کرد تا به جواب رسید، پس:

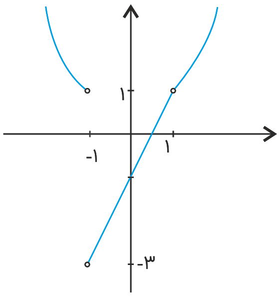
$$\sqrt{۳۰-۱۲\sqrt{۶}}=\sqrt{(۳\sqrt{۲}-۲\sqrt{۳})^۲}=|\underbrace{۳\sqrt{۲}-۲\sqrt{۳}}_{\text{مثبت}}|=۳\sqrt{۲}-۲\sqrt{۳}$$

۴ چون دهانهٔ سهمی روبه‌بالا است، حتماً $a>۰$، ازطرفی رأس سهمی در ناحیهٔ اول است، یعنی:

$$-\frac{b}{۲a}>۰ \xrightarrow{a>۰} -b>۰ \Rightarrow b<۰ \quad \Rightarrow \text{علامت } b \text{ منفی است.}$$

۵ الف

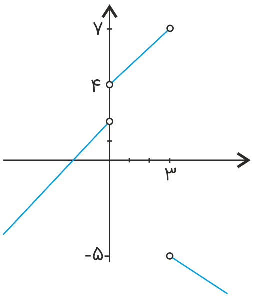
$$f(x)=\begin{cases} x^2 & ;x>1 \quad \text{یا} \quad x<-1 \\ 2x-1 & ;-1<x<1 \end{cases}$$



تابع f فقط در $x=-1$ حد ندارد. دقت کنید $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=1$ و تابع در $x=1$ حد دارد.

۶ الف

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{x}-\dfrac{x^2-9}{x-3} & ;x>3 \\ \dfrac{x}{x}-\dfrac{x^2-9}{-(x-3)} & ;0<x<3 \\ -\dfrac{x}{x}-\dfrac{x^2-9}{-(x-3)} & ;\ x<0 \end{cases} \Rightarrow f(x)=\begin{cases} -x-2 & ;x>3 \\ x+4 & ;0<x<3 \\ x+2 & ;x<0 \end{cases}$$



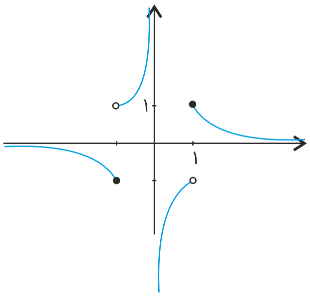
باتوجه‌به شکل تابع در نقاط $x=0$ و $x=3$ حد ندارد.

ب

$$x^{۲} \geq |x| \Rightarrow |x|^{۲} \geq |x| \Rightarrow |x| \geq ۱ \cup x = ۰$$

$$x^{۲} < |x| \Rightarrow |x|^{۲} < |x| \Rightarrow |x| < ۱$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{۱}{x} & ; |x| \geq ۱ \\ -\frac{۱}{x} & ; |x| < ۱ \end{cases}$$



باتوجه‌به شکل، تابع در نقاط $x = ۰$، $x = ۱$ و $x = -۱$ حد ندارد.

پاسخ سؤالات ۷ تا ۸

۷ با قرار دادن مقدار $x = ۱$ در حد، مشخص می‌شود که ابهام $\frac{۰}{۰}$ وجود دارد. برای رفع ابهام، صورت کسر را به $x - ۱$ تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{array}{l|l} \cancel{۲x^{۴}} - x - ۱ & x - ۱ \\ \cancel{-۲x^{۴}} + ۲x^{۳} & \overline{۲x^{۳} + ۲x^{۲} + ۲x + ۱} \\ \hline \cancel{۲x^{۳}} - x - ۱ & \\ \cancel{-۲x^{۳}} + ۲x^{۲} & \\ \hline \cancel{۲x^{۲}} - x - ۱ & \\ \cancel{-۲x^{۲}} + ۲x & \\ \hline \cancel{x} - ۱ & \\ \cancel{-x} + ۱ & \\ \hline ۰ & \end{array}$$

درنتیجه حد عبارت است از:

$$\lim_{x \to ۱} \frac{\cancel{(x-۱)}(۲x^{۳} + ۲x^{۲} + ۲x + ۱)}{\cancel{(x-۱)}(x+۱)x} = \lim_{x \to ۱} \frac{۲x^{۳} + ۲x^{۲} + ۲x + ۱}{x(x+۱)} = \frac{۲+۲+۲+۱}{۱ \times ۲} = \frac{۷}{۲}$$

۸ به‌جای x مقدار عددی حد چپ را قرار می‌دهیم:

$$\lim_{x \to -\frac{۳}{۲}^-} [۵ - ۲x] = \left[۵ - ۲(-\frac{۳}{۲})^-\right] = [۵ + ۳^+] = [۸^+] = ۸$$

۹ الف

$$R = (۰, +\infty)$$

ب

$$f^{-۱}(x) = \log_{۳} x$$

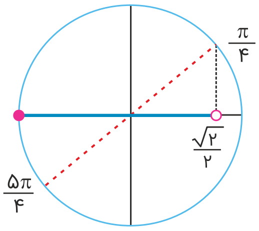
۱۰

$$\frac{\pi}{۶} < x < \frac{\pi}{۲} \xrightarrow{\times ۳} \frac{\pi}{۲} < ۳x < \frac{۳\pi}{۲}$$

$$A = \sqrt{۲}\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\sin ۳x + \frac{\sqrt{۲}}{۲}\cos ۳x\right) = \sqrt{۲}\left(\sin\frac{\pi}{۴}\sin ۳x + \cos\frac{\pi}{۴}\cos ۳x\right) = \sqrt{۲}\cos\left(۳x - \frac{\pi}{۴}\right)$$

$$\frac{\pi}{۲} < ۳x < \frac{۳\pi}{۲} \xrightarrow{-\frac{\pi}{۴}} \frac{\pi}{۴} < ۳x - \frac{\pi}{۴} < \frac{۵\pi}{۴}$$

محدودهٔ کمان $۳x - \frac{\pi}{۴}$ در دایرهٔ مثلثاتی شکل زیر نشان داده شده است؛ پس:



$$-۱ \leq \cos\left(۳x - \frac{\pi}{۴}\right) < \frac{\sqrt{۲}}{۲} \xrightarrow{\times\sqrt{۲}} -\sqrt{۲} \leq A < ۱$$

۱۱

$$\cos\alpha = -\sqrt{۱ - \sin^۲\alpha} = -\frac{۴}{۵} \quad (۰/۵) \qquad \sin\beta = \sqrt{۱ - \cos^۲\beta} = \frac{۱۲}{۱۳} \quad (۰/۲۵)$$

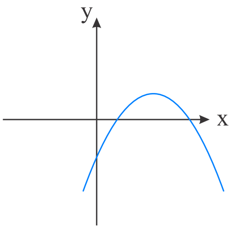
$$\sin(\alpha + \beta) = \underset{(۰/۲۵)}{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta} = \underset{(۰/۲۵)}{\frac{۳}{۵} \times \frac{۵}{۱۳} + \frac{۱۲}{۱۳}\left(-\frac{۴}{۵}\right)} = \underset{(۰/۲۵)}{-\frac{۳۳}{۶۵}}$$

۱۲

برای اینکه نمودار سهمی فوق از ناحیهٔ اول نگذرد، اول باید $a < ۰$ باشد.

حال بررسی می‌کنیم که به ازای چه مقادیری از a، نمودار از ناحیهٔ اول می‌گذرد. سپس این مقادیر را از $a < ۰$ حذف می‌کنیم. دقت کنید که چون $a < ۰$، پس عرض از مبدأ نمودار منفی است و حالت زیر اتفاق نمی‌افتد.

پس مطابق شکل زیر، نمودار باید دو ریشهٔ مثبت داشته باشد، بنابراین:



$$\Delta > ۰ \Rightarrow (a-۲)^۲ - ۴a(a-۱) > ۰ \Rightarrow -۳a^۲ + ۴ > ۰ \Rightarrow |a| < \frac{۲}{\sqrt{۳}}$$

$$S > ۰ \Rightarrow \frac{۲-a}{\underbrace{a}_{\text{منفی}}} > ۰ \Rightarrow ۲-a < ۰ \Rightarrow a > ۲$$

$$P > ۰ \Rightarrow \frac{a-۱}{\underbrace{a}_{\text{منفی}}} > ۰ \Rightarrow a-۱ < ۰ \Rightarrow a < ۱$$

اشتراک سه مورد بالا تهی می‌شود، بنابراین برای هر $a < ۰$ نمودار سهمی از ناحیهٔ اول نمی‌گذرد.

۱۳

معادلهٔ درجهٔ دومی که ریشه‌هایش α و β باشد برابر است با:

$$x^۲ - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta = ۰$$

$$\alpha+\beta = \sin^۴ ۱۵^\circ + \cos^۴ ۱۵^\circ = (\sin^۲ ۱۵^\circ + \cos^۲ ۱۵^\circ)^۲ - ۲\sin^۲ ۱۵^\circ \cos^۲ ۱۵^\circ$$

$$= ۱ - \frac{۱}{۲}\sin^۲ ۳۰^\circ = ۱ - \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۴} = \frac{۷}{۸}$$

$$\alpha\beta = \sin^۴ ۱۵^\circ \cos^۴ ۱۵^\circ = (\frac{۱}{۲}\sin ۳۰^\circ)^۴ = \frac{۱}{۲۵۶}$$

$$\Rightarrow x^۲ - \frac{۷}{۸}x + \frac{۱}{۲۵۶} = ۰ \xrightarrow{\times ۲۵۶} ۲۵۶x^۲ - ۲۲۴x + ۱ = ۰$$

نکته:

$$۲\sin x \cos x = \sin ۲x \Rightarrow \sin x \cos x = \frac{۱}{۲}\sin ۲x$$

۱۴

الف

نکته:

$$\sin^۲\alpha = \frac{۱-\cos ۲\alpha}{۲}$$

$$۴(\cos^۸ x - \sin^۸ x) = ۴(\cos^۴ x - \sin^۴ x)(\cos^۴ x + \sin^۴ x)$$

$$= ۴(\cos^۲ x - \sin^۲ x)(\underbrace{\cos^۲ x + \sin^۲ x}_{۱})((\underbrace{\sin^۲ x + \cos^۲ x}_{۱})^۲ - ۲\sin^۲ x\cos^۲ x$$

$$= ۴\cos ۲x(۱ - \frac{۱}{۲}\sin^۲ ۲x) = ۴\cos ۲x(۱ - \frac{۱}{۲}(\frac{۱-\cos ۴x}{۲})) = ۴\cos ۲x(\frac{۳}{۴} + \frac{۱}{۴}\cos ۴x)$$

$$= ۳\cos ۲x + \cos ۲x \cos ۴x$$

$$\Rightarrow ۳\cos ۲x + \cos ۲x\cos ۴x + \sin ۲x \sin ۴x = ۳\cos ۲x + \cos(۴x - ۲x) = ۴\cos ۲x$$

ب

$$(\frac{\sin x - \tan\frac{x}{۲}}{\cos x})^۲ = (\frac{۲\sin\frac{x}{۲}\cos\frac{x}{۲} - \frac{\sin\frac{x}{۲}}{\cos\frac{x}{۲}}}{\cos x})^۲ = (\frac{\sin\frac{x}{۲}(\frac{۲\cos^۲\frac{x}{۲} - ۱}{\cos\frac{x}{۲}})}{\cos x})^۲ = \tan^۲\frac{x}{۲}$$

دقت کنید که: $۲\cos^۲\frac{x}{۲} - ۱ = \cos x$

$$\frac{۲\sin x + \sin ۲x}{۲\sin x - \sin ۲x} = \frac{۲\sin x + ۲\sin x\cos x}{۲\sin x - ۲\sin x \cos x} = \frac{۲\sin x(۱+\cos x)}{۲\sin x(۱-\cos x)}$$

$$= \frac{۲\cos^۲\frac{x}{۲}}{۲\sin^۲\frac{x}{۲}} = \cot^۲\frac{x}{۲} \Rightarrow \tan^۲\frac{x}{۲}.\cot^۲\frac{x}{۲} = ۱$$

نکته:

$$\begin{cases} \cos ۲x = ۲\cos^۲ x - ۱ \\ \cos ۲x = ۱ - ۲\sin^۲ x \end{cases}$$

پ

$$(۲\cos x - ۱)(۲\cos x + ۱)(۲\cos ۲x - ۱) = (۴\cos^۲ x - ۱)(۲(۲\cos^۲ x - ۱) - ۱)$$

$$= (۴\cos^۲ x - ۱)(۴\cos^۲ x - ۳) = ۱۶\cos^۴ x - ۱۶\cos^۲ x + ۳$$

$$۲\cos ۴x = ۲(۲\cos^۲ ۲x - ۱) = ۲(۲(۲\cos^۲ x - ۱)^۲ - ۱) = ۴(۲\cos^۲ x - ۱)^۲ - ۲$$

$$= ۴(۴\cos^۴ x - ۴\cos^۲ x + ۱) - ۲ = ۱۶\cos^۴ x - ۱۶\cos^۲ x + ۲$$

$$\Rightarrow (۱۶\cos^۴ x - ۱۶\cos^۲ x + ۳) - (۱۶\cos^۴ x - ۱۶\cos^۲ x + ۲) = ۳ - ۲ = ۱$$

نکته:

$$\cos ۲x = ۲\cos^۲ x - ۱$$

پاسخ سؤالات ۱۵ تا ۱۶

۱۵

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{2-\sqrt{4-x^2}}}{\sin 2x}\times\underbrace{\frac{\sqrt{2+\sqrt{4-x^2}}}{\sqrt{2+\sqrt{4-x^2}}}}_{2}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{4-(4-x^2)}}{2\sin 2x}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{2\sin 2x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{2\sin 2x}=\frac{1}{2}\times-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}$$

نکته:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{bx}=\frac{a}{b}\quad , \quad \lim_{x\to 0}\frac{ax}{\sin bx}=\frac{a}{b}$$

۱۶

$$x-\frac{\pi}{3}=t\Rightarrow\begin{cases}x\to\frac{\pi}{3}: t\to 0\\ x=\frac{\pi}{3}+t\end{cases}$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{2\sin(\frac{\pi}{3}+t)-\sqrt{3}}{3t}=\lim_{t\to 0}\frac{2(\sin\frac{\pi}{3}\cos t+\cos\frac{\pi}{3}\sin t)-\sqrt{3}}{3t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{3}\cos t-\sqrt{3}+\sin t}{3t}=\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{3}(\cos t-1)}{3t}+\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{3t}=0+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$

دقت کنید برای محاسبهٔ حد قسمت اول خط بالا می‌نویسیم:

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{3}(\cos t-1)}{3t}\times\underbrace{\frac{\cos t+1}{\cos t+1}}_{2}=\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{3}(\cos^2 t-1)}{6t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{-\sqrt{3}\sin^2 t}{6t}=\lim_{t\to 0}(-\frac{\sqrt{3}}{6}\sin t\times\frac{\sin t}{t})=0\times 1=0$$