۱ پیوستگی تابع $f\,(x) = \sqrt{x - ۴}$ را در نقطهٔ $x = ۴$ بررسی کنید.

۲ معادلهٔ زیر را حل کنید.

$$(۴ - x^{۲})^{۲} - ۲(۴ - x^{۲}) - ۱۵ = ۰$$

۳ نمودار تابعی را رسم کنید که تابع در یک همسایگی ۳ تعریف‌شده باشد و در این نقطه حد داشته باشد، ولی حد آن غیر از مقدار تابع در ۳ باشد.

جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.

۴ اگر $x = ۲$ صفر تابع $f(x) = x^{۳} - kx^{۲} + ۸$ باشد، آنگاه مقدار k برابر با .... است.

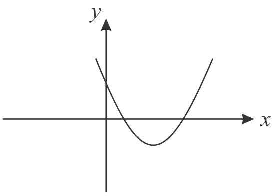
۵ نامعادلهٔ زیر را حل کنید.

$$(۳ - \sqrt{۸})^{x^{۲}} \geq (۳ + \sqrt{۸})^{x}$$

۶ معادلهٔ گویای $\dfrac{۱۵}{x^{۲} + ۲x} = \dfrac{۶}{x^{۲} - ۲x} - \dfrac{۲x + ۹}{x^{۲} - ۴}$ را حل کنید.

۷ بیشترین مقدار تابع $f\,(x) = -x^{۲} + ۴x + ۱$ را تعیین کنید.

۸ در شکل زیر، سهمی به معادلهٔ $f(x) = ax^{۲} + bx + c$ داده شده است. علامت ضرایب a و b و c و تعداد ریشه‌های معادلهٔ $ax^{۲} + bx + c = ۰$ را تعیین کنید.



۹ دامنهٔ $f(x) = \dfrac{۱}{\sqrt{\log_{\frac{۱}{۲}}^{(-\frac{۱}{۲}x^{۲} + ۲x - \frac{۳}{۲})}}}$ را به دست آورید.

۱۰ می‌دانیم α و β دو ریشهٔ مثبت معادلهٔ $x^{۲} + mx + ۵ = ۰$ هستند و ۵، $\alpha + \beta$ و $\alpha\beta$ به‌ترتیب تشکیل یک دنبالهٔ هندسی می‌دهند. مقدار m را به دست آورید.

۱۱ اگر تابع $f(x) = ۲[x] - ax[x] + x^{۲}[x] + ۱$ در نقطهٔ $x = ۲$ پیوسته باشد، مقدار a را به دست آورید.

۱۲ معادلهٔ زیر را حل کنید.

$$|۳x - ۲| = |x - ۴|$$

۱۳ وقتی در آسمان پدیدهٔ آذرخش رخ می‌دهد، اندکی پس از دیدن نور آن، صدای آن را نیز می‌شنویم. صدا ناشی از آذرخش هر ۳ ثانیه حدود یک کیلومتر را طی می‌کند. رابطهٔ بین فاصلهٔ ما از مکان وقوع آذرخش و زمانی که طول می‌کشد تا صدای آن را بشنویم در جدول زیر (برای برخی زمان‌ها) داده شده است ($t \in [۴, ۱۲]$).

الف جدول زیر را کامل کنید.

t (ثانیه)	۴	$۴\frac{۱}{۲}$	۵		۸	۹	$۱۰\frac{۱}{۵}$		۱۲
h (کیلومتر)	$\frac{۴}{۳}$	$\frac{۳}{۲}$		۲				$\frac{۱۱}{۳}$	

جاهای خالی را با عدد و یا عبارت ریاضی مناسب پر کنید.

۱۴ مقدار تابع $f(x) = [x + ۱]$ به ازای $x = \sqrt{۲}$ برابر با .... می‌باشد.

۱۵ وارون تابع $y = x^{۳}$، تابع .... است.

۱۶ تابع $y = |f(x)|$ را به‌صورت یک تابع دو ضابطه‌ای بنویسید.

۱۷ پیوستگی تابع زیر را در $x = ۱$ بررسی کنید.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x} - ۱}{x - ۱} & ; x > ۱ \\ x - \dfrac{۱}{۲} & ; x < ۱ \\ ۱ & ; x = ۱ \end{cases}$$

در جاهای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید.

۱۸ اگر $f = \{(۲ , ۳) , (۳ , ۵)\}$ باشد، حاصل $f^{-۱}(۳)$ برابر .... است.

۱۹ اگر $x_۱$ و $x_۲$ ریشه‌ها و S و P به ترتیب حاصل‌جمع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ درجه‌دوم $ax^{۲} + bx + c = ۰$ باشند، نشان دهید:

$$S = \frac{-b}{a} \ , \ P = \frac{c}{a}$$

۲۰ تابع $f(x) = |x + ۱| - |x - ۳|$ در یک بازه وارون‌پذیر است. ضابطه و دامنهٔ وارون آن در این بازه را به دست آورید.

۱ تابع در همسایگی چپ $x = ۴$ تعریف نشده است:

$$\lim_{x \to ۴^+} \sqrt{x - ۴} = ۰ \ , f(۴) = ۰$$

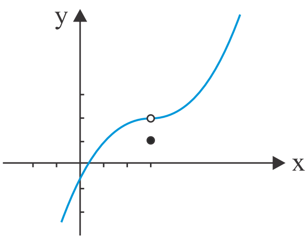
پس تابع در $x = ۴$ پیوستگی راست دارد.

۲

$$۴ - x^۲ = t \Rightarrow t^۲ - ۲t - ۱۵ = ۰ \Rightarrow (t - ۵)(t + ۳) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = ۵ \Rightarrow ۴ - x^۲ = ۵ \Rightarrow x^۲ = -۱ \quad \text{غ.ق.ق} \\ t = -۳ \Rightarrow ۴ - x^۲ = -۳ \Rightarrow x^۲ = ۷ \Rightarrow x = \pm\sqrt{۷} \end{cases}$$

۳ نمودار به صورت زیر قابل رسم است:



پاسخ سؤال ۴

۴ ۴

$$f(۲) = ۰ \Rightarrow ۸ - ۴k + ۸ = ۰ \Rightarrow k = ۴$$

۵ می‌دانیم $\frac{۱}{۳ - \sqrt{۸}} = ۳ + \sqrt{۸}$، پس $۳ + \sqrt{۸}$ را برابر a در نظر می‌گیریم و داریم:

$$(a^{-۱})^{x^۲} \geq a^x \Rightarrow a^{-x^۲} \geq a^x$$

$$\xrightarrow{a>۱} -x^۲ \geq x \Rightarrow x^۲ + x \leq ۰ \Rightarrow -۱ \leq x \leq ۰$$

۶ ابتدا مخرج‌ها را تجزیه می‌کنیم:

$$\frac{۲x+۹}{(x-۲)(x+۲)} - \frac{۶}{x(x-۲)} = \frac{۱۵}{x(x+۲)}$$

دو طرف را در $x(x-۲)(x+۲)$ ضرب می‌کنیم:

$$x(۲x+۹)-۶(x+۲)=۱۵(x-۲)$$
$$\Rightarrow ۲x^۲+۹x-۶x-۱۲-۱۵x+۳۰=۰$$
$$\Rightarrow ۲x^۲-۱۲x+۱۸=۰ \Rightarrow ۲(x-۳)^۲=۰ \Rightarrow x=۳$$

$x=۳$ مخرج کسرها را صفر نمی‌کند، پس قابل‌قبول است.

۷

$$x=\frac{-b}{۲a} \Rightarrow x=\frac{-۴}{-۲}=۲$$
بیشترین مقدار : $y=-۴+۸+۱=۵$

۸

$$a>۰\,,\quad b<۰\quad,\quad c>۰$$

معادله دو ریشه دارد.

۹ نکته: برای محاسبهٔ دامنهٔ تابع $\log_{g(x)}^{f(x)}$ باید شرط‌های زیر برقرار باشد:

$$f(x)>۰\ ,\ \ g(x)>۰\ ,\ \ g(x)\neq ۱$$

پس داریم:

$$-\frac{۱}{۲}x^۲+۲x-\frac{۳}{۲}>۰ \Rightarrow -\frac{۱}{۲}(x^۲-۴x+۳)>۰$$
$$\Rightarrow -\frac{۱}{۲}(x-۳)(x-۱)>۰ \Rightarrow D_f=(۱,۳)$$

البته زیر رادیکال هم باید مثبت باشد.

$$\log_{\frac{۱}{۲}}^{(-\frac{۱}{۲}x^۲+۲x-\frac{۳}{۲})}>۰ \Rightarrow -\frac{۱}{۲}x^۲+۲x-\frac{۳}{۲}<(\frac{۱}{۲})^{۰}$$
$$\Rightarrow -\frac{۱}{۲}x^۲+۲x-\frac{۳}{۲}<۱ \Rightarrow -\frac{۱}{۲}x^۲+۲x-\frac{۵}{۲}<۰ \xrightarrow{a<۰\,,\,\Delta<۰} \text{همواره برقرار است}$$

پس دامنهٔ $f(x)$، بازهٔ $(۱\ ,\ ۳)$ است.

۱۰ اگر ۵، $\alpha+\beta$ و $\alpha\beta$ تشکیل دنبالهٔ هندسی دهند، آنگاه:

$$(\alpha+\beta)^۲=(\alpha\beta)\,(۵)$$

ازطرفی داریم: $P=۵$ و $S=-m$

$$\Rightarrow (-m)^۲=۵\times۵ \Rightarrow m=\pm۵$$
$$\Rightarrow \begin{cases} m=۵ \Rightarrow x^۲+۵x+۵=۰ \quad \Delta>۰\,,\ S<۰\,,\ P>۰ \\ m=-۵ \Rightarrow x^۲-۵x+۵=۰ \quad \Delta>۰\,,\ S>۰\,,\ P>۰ \end{cases}$$

باتوجه‌به شرط مسأله، مبنی بر دو ریشهٔ مثبت، $m=-۵$ قابل‌قبول است.

۱۱ برای پیوستگی تابع $f(x)$ باید:

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x) = \lim_{x\to ۲^-} f(x) = f(۲)$$

حال:

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x) = f(۲) = ۲(۲) - a(۲)(۲) + ۴(۲) + ۱ = ۱۳ - ۴a$$

$$\lim_{x\to ۲^-} f(x) = ۲(۱) - a(۲)(۱) + ۴(۱) + ۱ = ۷ - ۲a$$

$$\Rightarrow ۷ - ۲a = ۱۳ - ۴a \Rightarrow -۶ = -۲a \Rightarrow a = ۳$$

۱۲ راه‌حل اول:

با استفاده از ویژگی‌های قدر مطلق: جواب‌های این معادله همان جواب‌های دو معادلهٔ $۳x - ۲ = x - ۴$ و $۳x - ۲ = -(x - ۴)$ هستند که به ترتیب عبارت‌اند از:

$$x = \frac{۳}{۲}, \ x = -۱$$

راه‌حل دوم:

با به توان دو رساندن طرفین معادله خواهیم داشت: $۹x^۲ - ۱۲x + ۴ = x^۲ - ۸x + ۱۶$؛ و ازآنجا $۲x^۲ - x - ۳ = ۰$ جواب‌های این معادله -۱ و $\frac{۳}{۲}$ هستند.

۱۳ الف

t (ثانیه)	۴	$۴\frac{۱}{۲}$	۵	۶	۸	۹	$۱۰\frac{۱}{۵}$	۱۱	۱۲
(کیلومتر) h	$\frac{۴}{۳}$	$\frac{۳}{۲}$	$\frac{۵}{۳}$	۲	$\frac{۸}{۳}$	$\frac{۹}{۳}$	$\frac{۵۱}{۱۵} = \frac{۱۷}{۵}$	$\frac{۱۱}{۳}$	۴

پاسخ سؤالات ۱۴ تا ۱۵

۱۴

$$f(x) = [x + ۱] \Rightarrow f(\sqrt{۲}) = [\sqrt{۲} + ۱] = ۲$$

۱۵

$$y = x^۳ \Rightarrow x = \sqrt[۳]{y} \Rightarrow f^{-۱}(x) = \sqrt[۳]{x}$$

۱۶

$$y = |f(x)| = \begin{cases} f(x) & ; f(x) \geq ۰ \\ -f(x) & ; f(x) < ۰ \end{cases}$$

۱۷

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x) = \lim_{x\to ۱^+} \frac{\sqrt{x} - ۱}{x - ۱} \times \frac{\sqrt{x} + ۱}{\sqrt{x} + ۱} = \lim_{x\to ۱^+} \frac{۱}{\sqrt{x} + ۱} = \frac{۱}{۲}$$

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x) = \lim_{x\to ۱^-} (x - \frac{۱}{۲}) = \frac{۱}{۲}$$

$f(۱) = ۱ \quad \Rightarrow \lim_{x\to ۱} f(x) = \frac{۱}{۲} \neq ۱ = f(۱) \quad \Rightarrow$ تابع در این نقطه پیوسته نیست.

۱۸ ۲

۱۹

$$S = x_1 + x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a}$$

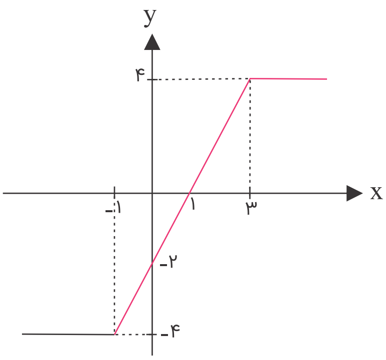
$$P = x_1x_2 = \frac{(-b+\sqrt{\Delta})}{2a} \times \frac{(-b-\sqrt{\Delta})}{2a} = \frac{b^2-\Delta}{4a^2} = \frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

۲۰ تابع f را به‌صورت چندضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$\begin{cases} x > 3 \Rightarrow f(x) = (x+1) - (x-3) = 4 \\ -1 \leq x \leq 3 \Rightarrow f(x) = (x+1) - (-x+3) = 2x-2 \\ x < -1 \Rightarrow f(x) = (-x-1) - (-x+3) = -4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} 4 & ; x > 3 \\ 2x-2 & ; -1 \leq x \leq 3 \\ -4 & ; x < -1 \end{cases}$$

نمودار آن را رسم می‌کنیم:



در بازهٔ $[-1, 3]$ یک‌به‌یک و درنتیجه وارون‌پذیر است. چون برد f در این بازه برابر با $[-4, 4]$ است، پس $D_{f^{-1}}$ هم همین بازه است. وارون ضابطهٔ $y = 2x - 2$ را حساب می‌کنیم:

عوض‌کردن x و y:

$$y = 2x - 2 \Rightarrow x = \frac{y+2}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + 1$$

پس:

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x + 1 \ , \ D_{f^{-1}} = [-4, 4]$$