



کمترین و بیشترین مقدار توابع زیر را به دست آورید.

$$y = -2 \cos x + 3$$

۱

$$y = -3 \sin x + 4$$

۲

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

از تساوی $\tan(\pi \sin x) = \cot(\pi \cos x)$ نتیجه بگیرید:

۳

جای خالی را با عبارت یا عدد مناسب کامل کنید.

۴ حاصل $1 + 3 + 5 + \dots + 41$ برابر است با

۴

۵ در دنباله حسابی با $S_n = \frac{n(n+3)}{2}$ ، قدر نسبت برابر است.

۵

۶ در دنباله هندسی با $S_n = \frac{5}{3}(4^n - 1)$ ، جمله برابر ۸۰ است.

۶

۷ اگر $\log_2 2 = 0/301$ باشد، عدد 2^{300} چندرقمی است؟

۷

۸ معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن، مکعب ریشه‌های معادله $x^2 - 6x + 3 = 0$ باشند.

۸

۹ مثلثی با رئوس $A(1, 5)$ و $B(7, 3)$ و $C(2, -2)$ مفروض است.

۹

الف معادله ضلع BC را بنویسید.

الف

ب طول میانه CM را به دست آورید.

ب

درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید:

۱۰ مکمل زاویه $\frac{\pi}{12}$ ، $\frac{11\pi}{12}$ است.

۱۰

۱۱ انتهای زاویه ۳ رادیان در ناحیه سوم مثلثاتی قرار دارد.

۱۱

۱۲ اگر زاویه بین دو ساق مثلث متساوی‌الساقینی ۱ رادیان باشد، آنگاه اندازه قاعده این مثلث کوچکتر از اندازه هریک از دو ساق‌های آن است.

۱۲

۱۳ معادله $\frac{x}{x+2} + \frac{2}{x-1} = 0$ را حل کنید.

۱۳

۱۴ به کمک رسم نمودار، نشان دهید توابع زیر در چه نقاطی حد دارند؟

۱۴

$$f(x) = [x] - x, \quad 0 < x < 4$$

الف

$$f(x) = \sqrt{2-x} + 1$$





پاسخ سؤالات ۱ تا ۲

$$y = -2 \cos x + 3$$

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow -2 \leq -2 \cos x \leq 2 \Rightarrow 1 \leq -2 \cos x + 3 \leq 5 \Rightarrow 1 \leq y \leq 5$$

$$y = -3 \sin x + 4$$

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow -3 \leq -3 \sin x \leq 3 \Rightarrow 1 \leq -3 \sin x + 4 \leq 7 \Rightarrow 1 \leq y \leq 7$$

$$\tan(\pi \sin x) = \cot(\pi \cos x) \Rightarrow \tan(\pi \sin x) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \pi \cos x\right)$$

$$\Rightarrow \pi \sin x = \frac{\pi}{2} - \pi \cos x \xrightarrow{:\pi} \sin x + \cos x = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x \right) = \frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} \sin x + \sin \frac{\pi}{4} \cos x \right) = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

۱

۲

۳

پاسخ سؤالات ۴ تا ۶

۴ می‌دانیم $1 + 3 + 5 + \dots + 2n - 1 = n^2$ در اینجا $41 = 2n - 1$ و $n = 21$ پس حاصل $21^2 = 441$ است.

۵ S_1 و S_2 را می‌یابیم:

$$S_1 = a_1 = 2 \text{ و } S_2 = 5 \Rightarrow a_2 = S_2 - S_1 = 5 - 2 = 3 \Rightarrow d = a_2 - a_1 = 1$$

$$S_n = \frac{5}{4}(4^n - 1) \Rightarrow S_1 = a_1 = 5, S_2 = 25 \Rightarrow a_2 = S_2 - S_1 = 25 - 5 = 20$$

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{20}{5} = 4 \Rightarrow aq^{n-1} = 20 \Rightarrow 5(4)^{n-1} = 20 \Rightarrow n = 3$$

۴

۵

۶

۷ حاصل لگاریتم عدد $A = 2^{200}$ در مبنای ۱۰ را حساب می‌کنیم:

$$\log A = \log 2^{200} = 200 \log 2 = 200 \times 0.301 = 60.2$$

از $\log_{10} A = 60.2$ نتیجه می‌گیریم: $A = 10^{60.2}$ ، پس:

$$\underbrace{10^{60}}_{\text{۶۱ رقمی}} < A = 10^{60.2} < \underbrace{10^{61}}_{\text{کوچک‌ترین عدد ۶۲ رقمی}} \Rightarrow \text{عدد } A, \text{ ۶۱ رقمی است}$$

۸ ریشه‌های معادله اولیه را α و β می‌گیریم و داریم:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = 6 \\ \alpha\beta = \frac{c}{a} = 3 \end{cases}$$

می‌خواهیم معادله‌ای بنویسیم که ریشه‌هایش α^3 و β^3 باشند. مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های جدید را حساب می‌کنیم:

$$S_{\text{جدید}} = \alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = 6^3 - 3(3)(6) = 216 - 54 = 162$$

$$P_{\text{جدید}} = \alpha^3 \beta^3 = (\alpha\beta)^3 = 3^3 = 27$$

با جایگذاری S و P در معادله $x^2 - Sx + P = 0$ معادله جدید به صورت $x^2 - 162x + 27 = 0$ درمی‌آید.

$$m = \frac{3+2}{7-2} = 1$$

$$y + 2 = 1(x - 2) \Rightarrow y = x - 4 \quad \text{ضلع BC}$$

$$M \begin{cases} x = \frac{7+1}{2} = 4 \\ y = \frac{3+5}{2} = 4 \end{cases}$$

$$CM = \sqrt{(4-2)^2 + (4+2)^2} = 2\sqrt{10}$$

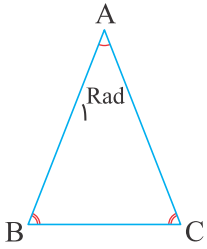
پاسخ سؤالات ۱۰ تا ۱۲

۱۰ درست

$$\frac{\pi}{12} + \frac{11\pi}{12} = \frac{12\pi}{12} = \pi$$

۱۱ نادرست، ۳ رادیان عددی کمتر از π هست، پس در ربع دوم قرار دارد.

درست، ۱ رادیان تقریباً ۵۷ درجه است و چون جمع زوایای مثلث 180° و زوایای B و C باهم برابرند، اندازه زاویه A کمتر از B و C خواهد بود و ضلع روبه‌رو به زاویه کوچک‌تر، کوچک‌تر است از ضلع روبه‌رو به زاویه بزرگ‌تر.



$$\frac{x}{x+2} + \frac{2}{x-1} = 0 \Rightarrow \frac{x(x-1) + 2(x+2)}{(x-1)(x+2)} = 0$$

$$\frac{x^2 - x + 2x + 4}{(x-1)(x+2)} = 0 \Rightarrow x^2 + x + 4 = 0$$

$$\Delta = 1 - 4(1)(4) \Rightarrow \Delta = -15$$

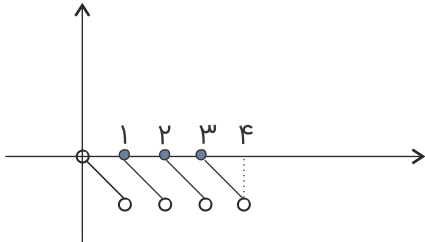
پس ریشه ندارد.

$$0 < x < 1 \Rightarrow f(x) = -x$$

$$1 \leq x < 2 \Rightarrow f(x) = 1 - x$$

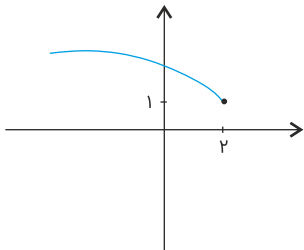
$$2 \leq x < 3 \Rightarrow f(x) = 2 - x$$

$$3 \leq x < 4 \Rightarrow f(x) = 3 - x$$



تابع f فقط در نقاط $x = 1, 2, 3$ حد ندارد.

$$f(x) = \sqrt{2-x} + 1, \quad D_f = (-\infty, 2]$$



تابع f در تمام نقاط دامنه غیراز نقطه $x = 2$ دارای حد است.