



۱ نمودار تابع $f(x) = \frac{4^x - 9}{2^x - 3}$ را رسم کرده و برد آن را به دست آورید.

درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید.

۲ به طور کلی برای دو تابع f و g داریم:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

۳ برای تابع در $x = a$:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}$$

۴ اگر $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x))$ موجود باشد، حتماً $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ نیز موجود هستند.

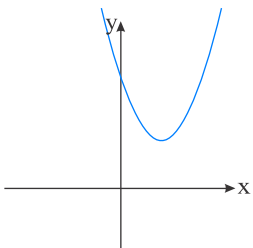
۵ حاصل عبارت $A = \frac{\sqrt{1 - \sin 6} - \sqrt{1 + \sin 6}}{\sqrt{1 - \cos 6}}$ را حساب کنید.

جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید.

۶ برای عدد حقیقی a ($a \neq 1$) و عدد طبیعی n ، حاصل عبارت $1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1}$ برابر است با

۷ ساده شده عبارت $\sqrt{30} - 12\sqrt{6}$ برابر است با

۸ شکل زیر، نمودار سهمی $y = ax^2 + bx + c$ است. علامت b است.



۹ معادله $2x^2 + mx - 1 = 0$ برای هر m حقیقی، دارای ریشه حقیقی است.

معادلات زیر را حل کنید.

۱۰

$$(x - \sqrt{x^2 - 4})^4 (x + \sqrt{x^2 - 4})^4 = 16$$

۱۱

$$(\sqrt{3 - 2\sqrt{2}})^x + (\sqrt{3 + 2\sqrt{2}})^x = 6$$

۱۲

اگر $f(x + \frac{1}{x}) = x^2 + \frac{1}{x^2}$ باشد، حاصل $f(4)$ را به دست آورید.

۱۳

حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$A = \tan(-\frac{\pi}{6}) \cdot \sin(-\frac{\pi}{3}) - \cot(-\frac{\pi}{6})$$

۱۴

اعداد $a, b, \frac{27}{8}$ ، -1 ، چهار جمله اول یک دنباله هندسی‌اند. مجموع شش جمله اول این دنباله را حساب کنید.

۱۵

ثابت کنید: $4 \sin \frac{\pi}{10} \sin \frac{13\pi}{10} = -1$



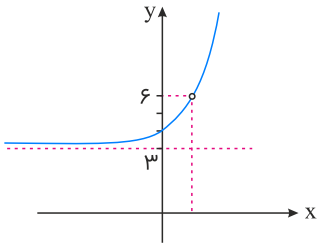
۱ ضابطه f را به کمک اتحاد مزدوج، ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{(2^x)^2 - 3^2}{2^x - 3} = \frac{(2^x - 3)(2^x + 3)}{2^x - 3} \xrightarrow{2^x \neq 3} f(x) = 2^x + 3$$

با شرط $2^x \neq 3$ داریم:

$$2^x + 3 \neq \underbrace{3 + 3}_6 \Rightarrow f(x) \neq 6$$

یعنی نقطه با عرض ۶، روی نمودار باید توخالی باشد. نمودار $f(x) = 2^x + 3$ را با این شرط رسم می‌کنیم:



$$\xrightarrow{\text{بُرد}} R_f = (3, +\infty) - \{6\}$$

پاسخ سؤالات ۲ تا ۴

۲ نادرست. در ابتدا باید گفته شود حد f و g در $x = a$ موجود است.

۳ نادرست. اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ باشد، گزاره درست نخواهد بود.

۴ نادرست. مثلاً $f(x) = [x]$ و $g(x) = -[-x]$ در $x = 1$ حد ندارند، ولی تفاضل آن‌ها در $x = 1$ حد دارد.

$$1 - \sin \epsilon = \sin^2 \omega + \cos^2 \omega - 2 \sin \omega \cos \omega = (\sin \omega - \cos \omega)^2$$

$$1 + \sin \epsilon = \sin^2 \omega + \cos^2 \omega + 2 \sin \omega \cos \omega = (\sin \omega + \cos \omega)^2$$

$$1 - \cos \epsilon = 2 \sin^2 \omega$$

$$\Rightarrow A = \frac{\sqrt{(\sin \omega - \cos \omega)^2} - \sqrt{(\sin \omega + \cos \omega)^2}}{\sqrt{2 \sin^2 \omega}} = \frac{\overbrace{|\sin \omega - \cos \omega|}^+ - \overbrace{|\sin \omega + \cos \omega|}^-}{\sqrt{2} \underbrace{|\sin \omega|}_+}$$

زاویه ω رادیان در ربع دوم قرار دارد و $\sin \omega > 0$ و $\cos \omega < 0$ و چون این زاویه خیلی به π رادیان نزدیک است: $|\cos x| > |\sin x|$ (قدرت علامت منفی در کسینوس بیشتر از مثبت در سینوس است)

$$\Rightarrow A = \frac{\sin \omega - \cos \omega + \sin \omega + \cos \omega}{\sqrt{2} \sin \omega} = \frac{2 \sin \omega}{\sqrt{2} \sin \omega} = \sqrt{2}$$

نکته:

$$2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha$$

$$1 - \cos 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha$$

$$1 + \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha$$

پاسخ سؤالات ۶ تا ۹

عبارت $1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1}$ مجموع n جمله اول یک دنباله هندسی است با قدر نسبت (نسبت مشترک) a و جمله اول 1 ، پس:

$$S_n = \frac{a(1 - q^n)}{1 - q} = \frac{1 \times (1 - a^n)}{1 - a} = \frac{1 - a^n}{1 - a}$$

برای اینکه زیر رادیکال، اتحاد مربع دوجمله‌ای ظاهر شود باید a و b را طوری محاسبه کنیم که:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 30 \\ 2ab = 12\sqrt{6} \end{cases} \Rightarrow a = 3\sqrt{2}, b = 2\sqrt{3}$$

باید حالت‌های گوناگون را آزمایش کرد تا به جواب رسید، پس:

$$\sqrt{30 - 12\sqrt{6}} = \sqrt{(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3})^2} = \underbrace{|3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}|}_{\text{مثبت}} = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$$

چون دهانه سهمی روبه‌بالا است، حتماً $a > 0$ ، از طرفی رأس سهمی در ناحیه اول است، یعنی:

$$-\frac{b}{2a} > 0 \xrightarrow{a > 0} -b > 0 \Rightarrow b < 0 \Rightarrow \text{علامت } b \text{ منفی است.}$$

$$\underbrace{(x - \sqrt{x^2 - 4})^2 (x + \sqrt{x^2 - 4})^2}_{(x^2 - x^2 + 4)^2} (x - \sqrt{x^2 - 4})^2 = 16$$

$$\Rightarrow (x^2 - x^2 + 4)^2 (x - \sqrt{x^2 - 4})^2 = 16 \Rightarrow 16(x - \sqrt{x^2 - 4})^2 = 16 \Rightarrow (x - \sqrt{x^2 - 4})^2 = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - \sqrt{x^2 - 4} = 1 \Rightarrow \sqrt{x^2 - 4} = x - 1 \xrightarrow{x \geq 1} x^2 - 4 = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow x = \frac{5}{2} \\ x - \sqrt{x^2 - 4} = -1 \Rightarrow \sqrt{x^2 - 4} = x + 1 \xrightarrow{x \geq -1} x^2 - 4 = x^2 + 2x + 1 \Rightarrow x = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

۱۱ می‌دانیم $1 = \sqrt{9 - 8} = \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} \times \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$ ، یعنی دو عبارت سمت چپ معکوس یکدیگرند.

پس قرار می‌دهیم $(\sqrt{3 - 2\sqrt{2}})^x = t$ و داریم:

$$t + \frac{1}{t} = 6 \xrightarrow{\times t} t^2 - 6t + 1 = 0$$

$$t = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4}}{2} = \frac{6 \pm 4\sqrt{2}}{2} = 3 \pm 2\sqrt{2}$$

$$(\sqrt{3 - 2\sqrt{2}})^x = 3 - 2\sqrt{2} \Rightarrow (3 - 2\sqrt{2})^{\frac{x}{2}} = 3 - 2\sqrt{2} \Rightarrow \frac{x}{2} = 1 \Rightarrow x = 2$$

$$(\sqrt{3 - 2\sqrt{2}})^x = 3 + 2\sqrt{2} \Rightarrow (3 - 2\sqrt{2})^{\frac{x}{2}} = (3 - 2\sqrt{2})^{-1} \Rightarrow \frac{x}{2} = -1 \Rightarrow x = -2$$

دقت کنید چون دو عدد معکوس یکدیگرند، داریم: $(3 + 2\sqrt{2}) = (3 - 2\sqrt{2})^{-1}$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2$$

$$f\left(x + \frac{1}{x}\right) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 \xrightarrow{x + \frac{1}{x} = t} f(t) = t^2 - 2$$

$$\Rightarrow f(4) = 14$$

$$A = \tan\left(-\frac{\pi}{6}\right) \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) - \cot\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\tan\frac{\pi}{6} \times \left(-\sin\frac{\pi}{3}\right) - \left(-\cot\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3} = \frac{1}{2} + \sqrt{3}$$

جمله اول این دنباله -1 و جمله چهارم آن برابر $\frac{۲۷}{۸}$ است. با توجه به اینکه در دنباله هندسی جمله n ام از رابطه $a_n = a_1 q^{n-1}$ محاسبه می‌شود، با داشتن a_1 و a_4 می‌توان مقدار q یا همان قدر نسبت دنباله را به صورت زیر محاسبه کرد:

$$\frac{a_4}{a_1} = \frac{\frac{۲۷}{۸}}{-1} = -\frac{۲۷}{۸} = \frac{a_1 q^{4-1}}{a_1} = q^{4-1} = q^3$$

$$q^3 = -\frac{۲۷}{۸} \Rightarrow q = -\frac{۳}{۲}$$

مجموع n جمله اول دنباله هندسی از رابطه $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ محاسبه می‌شود، پس مجموع پانزده جمله اول این دنباله برابر است با:

$$S_{15} = \frac{-1 \left(1 - \left(-\frac{۳}{۲} \right)^{15} \right)}{1 - \left(-\frac{۳}{۲} \right)} = \frac{- \left(1 - \left(\frac{۷۲۹}{۶۴} \right) \right)}{1 + \frac{۳}{۲}} = \frac{- \left(\frac{-۶۶۵}{۶۴} \right)}{\frac{۵}{۲}} = \frac{۱۳۳}{۳۲}$$

$$\sin \frac{۱۳\pi}{۱۰} = \sin \left(\pi + \frac{۳\pi}{۱۰} \right) = -\sin \frac{۳\pi}{۱۰}$$

$$۴ \sin \frac{\pi}{۱۰} \sin \frac{۱۳\pi}{۱۰} = -۴ \sin \frac{\pi}{۱۰} \sin \frac{۳\pi}{۱۰}$$

عبارت را در $\cos \frac{\pi}{۱۰}$ ضرب و تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{-۴ \cos \frac{\pi}{۱۰} \sin \frac{\pi}{۱۰} \sin \frac{۳\pi}{۱۰}}{\cos \frac{\pi}{۱۰}} = \frac{-۲ \sin \frac{۲\pi}{۱۰} \sin \frac{۳\pi}{۱۰}}{\cos \frac{\pi}{۱۰}}$$

$$= \frac{-۲ \sin \frac{۲\pi}{۱۰} \cos \frac{۲\pi}{۱۰}}{\cos \frac{\pi}{۱۰}} = \frac{-\sin \frac{۴\pi}{۱۰}}{\cos \frac{\pi}{۱۰}} = -1$$

دقت کنید $\frac{۲\pi}{۱۰}$ و $\frac{۳\pi}{۱۰}$ متمم یکدیگرند؛ پس $\sin \frac{۳\pi}{۱۰} = \cos \frac{۲\pi}{۱۰}$ و $\frac{۴\pi}{۱۰}$ و $\frac{\pi}{۱۰}$ نیز متمم یکدیگرند، پس $\sin \frac{۴\pi}{۱۰} = \cos \frac{\pi}{۱۰}$.