۱ دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{-\log_{\frac{۱}{۲}}^{(\frac{۲x-۴}{x+۲})}+۱}+\frac{۱}{\sqrt{\log[x]}}$ را تعیین کنید.

۲ اگر $\sin^۲\alpha$ و $\cos^۲\alpha$ ریشه‌های معادلهٔ $۳x^۲-۶ax-a+۱=۰$ باشند، مطلوب است:

الف مقدار عددی عبارت $A=\tan^۳\alpha+\cot^۳\alpha$

ب نوشتن معادلهٔ درجهٔ دومی که ریشه‌هایش $\tan^۲\alpha$ و $\cot^۲\alpha$ باشد.

حدهای زیر را محاسبه کنید.

۳ $\lim\limits_{x\to-۴}\frac{x+۴}{\sqrt{۳x+۱۳}-۱}$

۴ اگر $\log ۴=۰/۶$ باشد، حاصل $\log_{۸}^{\sqrt[۷]{۵}}$ چقدر است؟

۵ حد زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

$\lim\limits_{x\to۱}\frac{\sqrt{x}-۱}{x^۲-۱}$

۶ اگر $f(x)=۱+\log_{\sqrt{۳}}^{(۳x-۲)}$، حاصل $f^{-۱}\left(\log_{۳}^{۱۲}\right)$ را به دست آورید.

حدهای زیر را محاسبه کنید.

۷ $\lim\limits_{x\to۱}\frac{۲-\sqrt{x+۳}}{x^۲-۱}$

۸ درستی تساوی‌های زیر را ثابت کنید.

الف
$$\frac{(\frac{۱}{\sin\alpha}+\cot\alpha)(\frac{۱}{\cos\alpha}+\tan\alpha)}{(\frac{۱}{\sin\alpha}-\cot\alpha)(\frac{۱}{\cos\alpha}-\tan\alpha)}=\left(\frac{۱+\cot\frac{\alpha}{۲}}{۱-\tan\frac{\alpha}{۲}}\right)^۲$$

۹ حاصل عبارت $A=\frac{\sqrt{۱-\sin۶}-\sqrt{۱+\sin۶}}{\sqrt{۱-\cos۶}}$ را حساب کنید.

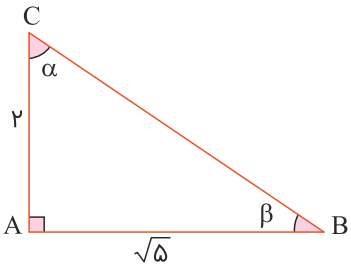
۱۰ توابع $f(x)=x-۱$ و $g(x)=\sqrt{x+۲}$ داده شده‌اند:

الف دامنهٔ توابع $f(x)$ و $g(x)$ را به دست آورید.

ب دامنهٔ تابع $f\times g$ را به دست آورید.

پ ضابطهٔ gof را بنویسید.

۱۱ در مثلث شکل زیر، مقادیر $\sin\frac{\alpha}{۲}$ و $\cos\frac{۳\beta}{۲}$ را به دست آورید.



۱۲ دایره‌ای به شعاع ۲ متر مفروض است. اگر اندازهٔ یک زاویهٔ مرکزی در این دایره ۱/۵ رادیان باشد، طول کمان روبه‌روی این زاویه را به دست آورید.

۱ نکته: دامنهٔ تابع $y=\log_a^x$ عبارت است از: $x>0, a>0, a\neq 1$

۱) $\frac{2x-4}{x+2}>0 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-2 \end{cases} \Rightarrow$

x		-2		2	
P	+	ت.ن	−	۰	+

$\Rightarrow x\in(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$

۲) $-\log_{\frac{1}{2}}^{\frac{2x-4}{x+2}}+1\geq 0 \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}}^{\frac{2x-4}{x+2}}\leq 1 \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}}^{\frac{2x-4}{x+2}}\leq \log_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{2x-4}{x+2}\geq \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \frac{2x-4}{x+2}-\frac{1}{2}\geq 0 \Rightarrow \frac{3x-10}{2x+4}\geq 0 \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{10}{3} \\ x=-2 \end{cases} \Rightarrow$

x		-2		$\frac{10}{3}$	
P	+	ت.ن	−	۰	+

$\Rightarrow x\in(-\infty,-2)\cup[\frac{10}{3},+\infty)$

۳) $\log[x]>0 \Rightarrow \log[x]>\log 1 \Rightarrow [x]>1 \Rightarrow x\geq 2$

۴) $[x]>0 \Rightarrow x\geq 1$

از اشتراک بازه‌های ۴ مورد بالا داریم: $D_f=[\frac{10}{3},+\infty)$

نکته:

$$\log_a^x<\log_a^y \Rightarrow \begin{cases} a>1 \Rightarrow x<y \\ 0<a<1 \Rightarrow x>y \end{cases}$$

۲

الف

$$\sin^{۲}\alpha+\cos^{۲}\alpha=۱\Rightarrow S=۱\Rightarrow\frac{۶a}{۳}=۱\Rightarrow a=\frac{۱}{۲}$$

$$\sin^{۲}\alpha\cos^{۲}\alpha=P=\frac{-a+۱}{۳}=\frac{-\frac{۱}{۲}+۱}{۳}=\frac{۱}{۶}\Rightarrow\sin\alpha\cos\alpha=\pm\frac{\sqrt{۶}}{۶}$$

$$A=\tan^{۳}\alpha+\cot^{۳}\alpha=(\tan\alpha+\cot\alpha)^{۳}-۳\tan\alpha\cot\alpha(\tan\alpha+\cot\alpha)$$

$$\tan\alpha+\cot\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin^{۲}\alpha+\cos^{۲}\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}$$
$$=\frac{۱}{\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{۱}{\pm\frac{\sqrt{۶}}{۶}}=\pm\sqrt{۶}$$

$$\Rightarrow A=(\pm\sqrt{۶})^{۳}-۳(\pm\sqrt{۶})\Rightarrow\begin{cases}A=۶\sqrt{۶}-۳\sqrt{۶}=۳\sqrt{۶}\\A=-۶\sqrt{۶}+۳\sqrt{۶}=-۳\sqrt{۶}\end{cases}$$

ب

$$S=\tan^{۲}\alpha+\cot^{۲}\alpha=(\tan\alpha+\cot\alpha)^{۲}-۲\tan\alpha\cot\alpha$$
$$=(\frac{۱}{\sin\alpha\cos\alpha})^{۲}-۲$$

$$\xrightarrow{\text{قسمت اول}}(\pm\sqrt{۶})^{۲}-۲=۶-۲=۴$$

$$P=\tan^{۲}\alpha.\cot^{۲}\alpha=۱$$

$$x^{۲}-Sx+P=۰\Rightarrow x^{۲}-۴x+۱=۰$$

نکته: اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم باشند، این معادله به شکل $x^{۲}-Sx+P=۰$ است که در $S=\alpha+\beta$ و $P=\alpha\beta$.

پاسخ سؤال ۳

۳

$$\lim_{x\to-۴}\frac{(x+۴)(\sqrt{۳x+۱۳}+۱)}{۳x+۱۳-۱}=\lim_{x\to-۴}\frac{(x+۴)(\sqrt{۳x+۱۳}+۱)}{۳(x+۴)}=\frac{۲}{۳}$$

۴

ابتدا مقدار $\log ۲$ را پیدا می‌کنیم:

$$\log ۴=۰/۶\Rightarrow\log ۲^{۲}=۰/۶\Rightarrow ۲\log ۲=۰/۶\Rightarrow\log ۲=۰/۳$$

نکته: $\log ۲+\log ۵=۱$.

به کمک نکتهٔ بالا داریم:

$$۰/۳+\log ۵=۱\Rightarrow\log ۵=۰/۷$$

از قاعدهٔ تغییر مبنا استفاده می‌کنیم:

$$\log_{B}^{A}=\frac{\log_{C}^{A}}{\log_{C}^{B}}\Rightarrow\log_{۸}^{\sqrt[۷]{۵}}=\frac{\log\sqrt[۷]{۵}}{\log ۸}=\frac{\frac{۱}{۷}\log ۵}{۳\log ۲}=\frac{\frac{۱}{۷}\times ۰/۷}{۳\times ۰/۳}=\frac{۰/۱}{۰/۹}=\frac{۱}{۹}$$

۵

$$\lim_{x\to۱}\frac{\sqrt{x}-۱}{x^{۲}-۱}\times\frac{\sqrt{x}+۱}{\sqrt{x}+۱}=\lim_{x\to۱}\frac{x-۱}{(x-۱)(x+۱)\sqrt{x}+۱}=\frac{۱}{۴}$$

۶ می‌دانیم طول نقطه در تابع f^{-1}، عرض آن در تابع f است، پس:

$$\log_{۳}^{۱۲} = ۱ + \log_{\sqrt{۳}}^{(۳x-۲)} \Rightarrow \log_{۳^{\frac{۱}{۲}}}^{(۳x-۲)} - \log_{۳}^{۱۲} = -۱$$

$$\Rightarrow ۲\log_{۳}^{(۳x-۲)} - \log_{۳}^{۱۲} = -۱ \Rightarrow \log_{۳}^{\frac{(۳x-۲)^۲}{۱۲}} = -۱ \Rightarrow \frac{(۳x-۲)^۲}{۱۲} = \frac{۱}{۳}$$

$$\Rightarrow (۳x-۲)^۲ = ۴ \Rightarrow ۳x-۲ = \pm ۲ \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{۴}{۳} \\ x = ۰ \text{ غ‌ق‌ق} \end{cases}$$

دقت کنید $x = ۰$ ورودی لگاریتم را منفی می‌کند پس غیرقابل‌قبول است.

پاسخ سؤال ۷

۷

$$\lim_{x \to ۱} \frac{۴ - x - ۳}{(x-۱)(x+۱)\left(۲ + \sqrt{x+۳}\right)} = \frac{-۱}{۸}$$

۸ الف سمت چپ را ساده می‌کنیم، به‌جای $\tan\alpha$ و $\cot\alpha$ قرار می‌دهیم $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ و $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$:

$$\frac{\frac{۱+\cos\alpha}{\cancel{\sin\alpha}} \times \frac{۱+\sin\alpha}{\cancel{\cos\alpha}}}{\frac{۱-\cos\alpha}{\cancel{\sin\alpha}} \times \frac{۱-\sin\alpha}{\cancel{\cos\alpha}}} = \frac{۱+\cos\alpha}{۱-\cos\alpha} \times \frac{۱+\sin\alpha}{۱-\sin\alpha}$$

$$= \frac{۲\cos^۲\frac{\alpha}{۲}}{۲\sin^۲\frac{\alpha}{۲}} \times \frac{\sin^۲\frac{\alpha}{۲} + \cos^۲\frac{\alpha}{۲} + ۲\sin\frac{\alpha}{۲}\cos\frac{\alpha}{۲}}{\sin^۲\frac{\alpha}{۲} + \cos^۲\frac{\alpha}{۲} - ۲\sin\frac{\alpha}{۲}\cos\frac{\alpha}{۲}}$$

در عبارت آخر، صورت و مخرج را بر $\cos\frac{\alpha}{۲}$ تقسیم می‌کنیم:

$$\cot^۲\frac{\alpha}{۲} \times \left(\frac{\sin\frac{\alpha}{۲} + \cos\frac{\alpha}{۲}}{\sin\frac{\alpha}{۲} - \cos\frac{\alpha}{۲}}\right)^۲ = \cot^۲\frac{\alpha}{۲}\left(\frac{۱+\tan\frac{\alpha}{۲}}{\tan\frac{\alpha}{۲} - ۱}\right)^۲ = \left(\frac{۱+\cot\frac{\alpha}{۲}}{۱-\tan\frac{\alpha}{۲}}\right)^۲$$

نکته:

$$\begin{cases} ۱ + \cos\alpha = ۲\cos^۲\frac{\alpha}{۲} \\ ۱ - \cos\alpha = ۲\sin^۲\frac{\alpha}{۲} \end{cases}$$

۹

$$۱-\sin ۶=\sin^۲ ۳+\cos^۲ ۳-۲\sin ۳\cos ۳=(\sin ۳-\cos ۳)^۲$$

$$۱+\sin ۶=\sin^۲ ۳+\cos^۲ ۳+۲\sin ۳\cos ۳=(\sin ۳+\cos ۳)^۲$$

$$۱-\cos ۶=۲\sin^۲ ۳$$

$$\Rightarrow A=\frac{\sqrt{(\sin ۳-\cos ۳)^۲}-\sqrt{(\sin ۳+\cos ۳)^۲}}{\sqrt{۲\sin^۲ ۳}}=\frac{|\overbrace{\sin ۳-\cos ۳}^{+}|-|\overbrace{\sin ۳+\cos ۳}^{-}|}{\sqrt{۲}|\underbrace{\sin ۳}_{+}|}$$

زاویهٔ ۳ رادیان در ربع دوم قرار دارد و $\sin ۳>۰$ و $\cos ۳<۰$ و چون این زاویه خیلی به π رادیان نزدیک است: $|\cos x|>|\sin x|$ (قدرت علامت منفی در کسینوس بیشتر از مثبت در سینوس است)

$$\Rightarrow A=\frac{\sin ۳-\cancel{\cos ۳}+\sin ۳+\cancel{\cos ۳}}{\sqrt{۲}\sin ۳}=\frac{۲\cancel{\sin ۳}}{\sqrt{۲}\cancel{\sin ۳}}=\sqrt{۲}$$

نکته:

$$۲\sin\alpha\cos\alpha=\sin ۲\alpha$$
$$۱-\cos ۲\alpha=۲\sin^۲\alpha$$
$$۱+\cos ۲\alpha=۲\cos^۲\alpha$$

۱۰

الف

$$D_f=\mathbb{R},\ D_g=x+۲\geq ۰\Rightarrow x\geq -۲$$

ب

$$D_{f\times g}=D_f\cap D_g=[-۲,+\infty)$$

پ

$$gof(x)=g(f(x))=g(x-۱)=\sqrt{x+۱}$$

۱۱

$$BC=\sqrt{AC^۲+AB^۲}=\sqrt{۴+۵}=۳$$

$$\cos\alpha=\frac{AC}{BC}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow\cos\alpha=۲\cos^۲\frac{\alpha}{۲}-۱\Rightarrow\frac{۲}{۳}=۲\cos^۲\frac{\alpha}{۲}-۱$$

$$\Rightarrow\cos^۲\frac{\alpha}{۲}=\frac{۵}{۶}\xrightarrow{\text{حاده }\frac{\alpha}{۲}}\cos\frac{\alpha}{۲}=\sqrt{\frac{۵}{۶}}$$

$$\sin^۲\frac{\alpha}{۲}=\pm\sqrt{۱-\cos^۲\frac{\alpha}{۲}}=\pm\sqrt{۱-\frac{۵}{۶}}\xrightarrow{\text{حاده }\frac{\alpha}{۲}}\sin\frac{\alpha}{۲}=\frac{۱}{\sqrt{۶}}=\frac{\sqrt{۶}}{۶}$$

$$\cos\beta=\frac{\sqrt{۵}}{۳},\ \sin\beta=\frac{۲}{۳},\ \cos\beta=۲\cos^۲\frac{\beta}{۲}-۱\Rightarrow\frac{\sqrt{۵}}{۳}=۲\cos^۲\frac{\beta}{۲}-۱$$

$$\xrightarrow{\text{حاده }\frac{\beta}{۲}}\cos\frac{\beta}{۲}=\sqrt{\frac{۳+\sqrt{۵}}{۶}}$$

$$\sin\frac{\beta}{۲}=\pm\sqrt{۱-\cos^۲\frac{\beta}{۲}}=\pm\sqrt{۱-\frac{۳+\sqrt{۵}}{۶}}\xrightarrow{\text{حاده }\frac{\beta}{۲}}\sin\frac{\beta}{۲}=\sqrt{\frac{۳-\sqrt{۵}}{۶}}$$

$$\cos\frac{۳\beta}{۲}=\cos(\beta+\frac{\beta}{۲})=\cos\beta\cos\frac{\beta}{۲}-\sin\beta\sin\frac{\beta}{۲}=\frac{\sqrt{۵}}{۳}\times\sqrt{\frac{۳+\sqrt{۵}}{۶}}-\frac{۲}{۳}\times\sqrt{\frac{۳-\sqrt{۵}}{۶}}$$

۱۲

$$\alpha=\frac{l}{r}\Rightarrow ۱/۵=\frac{l}{۲\,m}\Rightarrow l=۳\,m$$