حدهای زیر را محاسبه کنید.

۱ $\lim\limits_{x\to ۱} \frac{\sqrt{x}-۱}{x^۲-۵x+۴}$

۲ $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۵}} \frac{\sin(۵x-\pi)}{x-\frac{\pi}{۵}}$

۳ دو تابع $f(x)=\sqrt{x-۴}$ و $g(x)=\frac{۱}{x^۲-۱}$ را در نظر بگیرید. دامنهٔ تابع gof را با استفاده از تعریف به دست آورید.

۴ حاصل $\lim\limits_{x\to \frac{۳\pi}{۴}} \frac{۱+\cot x}{\sin^۳ x+\cos^۳ x}$ را به دست آورید.

۵ نقاط $A(۲,k)$ و $B(-۱,-۱)$ و $C(۴,۱)$ رئوس یک مثلث هستند. اگر طول میانهٔ BM برابر با ۵ باشد، k چه اعدادی می‌تواند باشد؟

۶ حاصل عبارت زیر را حساب کنید.

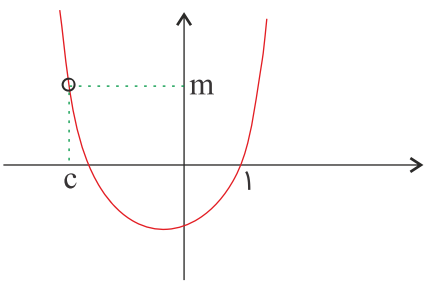
$$A=\frac{\sin ۱۰^\circ \times \sin ۲۰^\circ \times \tan ۱۱۰^\circ}{\cos ۸۰^\circ \times \cos ۲۰^\circ}$$

۷ دامنهٔ $f(x)=\frac{۱}{\sqrt{\log_{\frac{۱}{۲}}^{(-\frac{۱}{۲}x^۲+۲x-\frac{۳}{۲})}}}$ را به دست آورید.

درستی رابطه‌های زیر را نشان دهید:

۸ $\frac{\sin x}{۱+\cos x}=\tan\frac{x}{۲}$

۹ شکل زیر، نمودار تابع $f(x)=\frac{x^۳+ax^۲+bx-۲}{x+۲}$ است. مقادیر a و b و m را به دست آورید.



۱۰ اگر مرکز مربعی نقطهٔ $(-۱,۲)$ و یکی از رئوس آن $A(۲,۱)$ باشد، مختصات رئوس دیگر را پیدا کنید.

۱۱ جواب نامعادلهٔ $\frac{۱}{۶۴} > (\frac{۱}{۴})^{x+\sqrt{۵}} \times ۴^{۳x+\sqrt{۵}}$ را به دست آورید.

۱۲ در یک مخروط به شعاع قاعدهٔ r و مولد L، نشان دهید مساحت جانبی برابر با πrL است.

۱۳ اگر $f(x) = \sqrt{x-۳}$ و $g = \{(۰,۴),(۳,۲),(۵,۶)\}$ دو تابع باشند:

الف تابع fog را به‌صورت زوج‌های مرتب بنویسید.

ب دامنهٔ تابع $\frac{f}{g}$ را بنویسید.

۱۴ فرض کنید $\tan\alpha = -\frac{۱}{۲}$ و α زاویه‌ای منفرجه باشد، عبارت $\cos ۲\alpha$ را محاسبه کنید.

مقدار نسبت‌های مثلثاتی زیر را حساب کنید.

۱۵ $\cos ۱۵^\circ$

۱۶ آیا توابع $f(x) = \sqrt{x(x-۱)}$ و $g(x) = \sqrt{x}.\sqrt{x-۱}$ باهم مساوی‌اند؟

۱۷ اگر $f(x) = \log\left(\sqrt{ax^۲+۱}+۲x\right)$ و $f(x)+f(-x) = ۰$ باشد، مقدار a را به دست آورید.

۱۸ دایره‌ای به شعاع ۲ متر مفروض است. اگر اندازهٔ یک زاویهٔ مرکزی در این دایره ۱/۵ رادیان باشد، طول کمان روبه‌روی این زاویه را به دست آورید.

۱۹ به ازای چه مجموعه مقادیری از x، عبارت $A = \sqrt{x^۲+۶x+۹}+|۲x-۸|+x$ مستقل از x است؟

پاسخ سؤالات ۱ تا ۲

۱

$$\lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt{x}-۱}{x^۲-۵x+۴}\times\frac{\sqrt{x}+۱}{\sqrt{x}+۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{x-۱}{(x-۱)(x-۴)(\sqrt{x}+۱)}=-\frac{۱}{۶}$$

۲

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۵}}\frac{\sin(۵x-\pi)}{x-\frac{\pi}{۵}}=\lim_{x\to \frac{\pi}{۵}}\frac{۵\sin(۵x-\pi)}{۵x-\pi}=۵$$

۳

$$D_{gof}=\{x\in D_f | f(x)\in D_g\}$$
$$=\{x\geq ۴ | \sqrt{x-۴}\neq \pm ۱\}=[۴,۵)\cup(۵,+\infty)$$

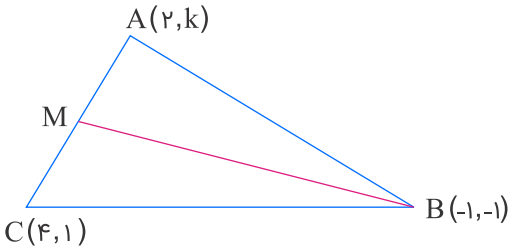
۴

$$\lim_{x\to \frac{۳\pi}{۴}}\frac{۱+\cot x}{\sin^۳x+\cos^۳x}=\frac{۰}{۰}$$

$$\lim_{x\to \frac{۳\pi}{۴}}\frac{\frac{\cancel{\sin x+\cos x}}{\sin x}}{\cancel{(\sin x+\cos x)}(\sin^۲x+\cos^۲x-\sin x\cos x)}=\frac{\frac{۱}{\sqrt{۲}}}{\frac{۲}{۱}+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}}$$

$$=\frac{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{\frac{۳}{۲}}=\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$$

۵ شکل فرضی زیر را در نظر می‌گیریم:



مختصات M را حساب می‌کنیم:

$$M = (۳, \frac{k+۱}{۲})$$

فاصلهٔ B تا M باید برابر با ۵ باشد:

$$BM = ۵ \Rightarrow \sqrt{(۳+۱)^۲ + (\frac{k+۱}{۲}+۱)^۲} = ۵$$

$$\Rightarrow ۱۶ + (\frac{k+۳}{۲})^۲ = ۲۵ \Rightarrow \begin{cases} \frac{k+۳}{۲} = ۳ \Rightarrow k = ۳ \\ \frac{k+۳}{۲} = -۳ \Rightarrow k = -۹ \end{cases}$$

۶

$$A = \frac{\sin ۱۰^\circ \times \sin ۲۰^\circ \times \tan(۹۰^\circ + ۲۰^\circ)}{\sin ۱۰^\circ \times \cos ۲۰^\circ}$$

$$= \tan ۲۰^\circ \times (-\cot ۲۰^\circ) = -۱$$

۷ نکته: برای محاسبهٔ دامنهٔ تابع $\log_{g(x)}^{f(x)}$ باید شرط‌های زیر برقرار باشد:

$$f(x) > ۰ \ , \ g(x) > ۰ \ , \ g(x) \neq ۱$$

پس داریم:

$$-\frac{۱}{۲}x^۲ + ۲x - \frac{۳}{۲} > ۰ \Rightarrow -\frac{۱}{۲}(x^۲ - ۴x + ۳) > ۰$$

$$\Rightarrow -\frac{۱}{۲}(x-۳)(x-۱) > ۰ \Rightarrow D_f = (۱, ۳)$$

البته زیر رادیکال هم باید مثبت باشد.

$$\log_{\frac{۱}{۲}}^{(-\frac{۱}{۲}x^۲ + ۲x - \frac{۳}{۲})} > ۰ \Rightarrow -\frac{۱}{۲}x^۲ + ۲x - \frac{۳}{۲} < (\frac{۱}{۲})^۰$$

$$\Rightarrow -\frac{۱}{۲}x^۲ + ۲x - \frac{۳}{۲} < ۱ \Rightarrow -\frac{۱}{۲}x^۲ + ۲x - \frac{۵}{۲} < ۰ \xrightarrow{a<۰, \Delta<۰}$$ همواره برقرار است

پس دامنهٔ $f(x)$، بازهٔ $(۱ \ , \ ۳)$ است.

۸

$$\frac{\sin x}{۱+\cos x}=\frac{۲\sin\frac{x}{۲}\cos\frac{x}{۲}}{۲\cos^{۲}\frac{x}{۲}}=\frac{\sin\frac{x}{۲}}{\cos\frac{x}{۲}}=\tan\frac{x}{۲}$$

۹

تابع f در نقطهٔ $x=c$ حد دارد ولی مقدار ندارد، پس $x=c$ هم ریشهٔ صورت است و هم ریشهٔ مخرج. درواقع حد تابع f در $x=c$ در ابتدا باید ابهام $\frac{۰}{۰}$ داشته باشد، پس $c=-۲$.

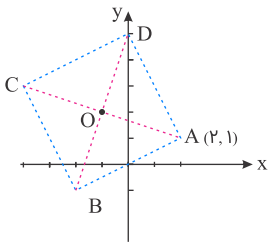
$$x=-۲\xrightarrow{\text{صورت}}(-۲)^{۳}+a(-۲)^{۲}+b(-۲)-۲=۰\Rightarrow ۴a-۲b=۱۰$$

$$(۱,۰)\in f\Rightarrow ۱+a+b-۲=۰\Rightarrow a+b=۱$$

$$\begin{cases}۲a-b=۵\\ a+b=۱\end{cases}\Rightarrow a=۲\ ,\ b=-۱$$

$$m=\lim_{x\to-۲}f(x)=\lim_{x\to-۲}\frac{x^{۳}+۲x^{۲}-x-۲}{x+۲}=\lim_{x\to-۲}\frac{x^{۲}(x+۲)-(x+۲)}{x+۲}$$
$$=\lim_{x\to-۲}\frac{\cancel{(x+۲)}(x^{۲}-۱)}{\cancel{(x+۲)}}=۳\Rightarrow m=۳$$

۱۰



در ابتدا O وسط قطر AC است، پس:

$$\begin{cases}x_O=\frac{x_A+x_C}{۲}\Rightarrow -۱=\frac{۲+x_C}{۲}\Rightarrow x_C=-۴\\ y_O=\frac{y_A+y_C}{۲}\Rightarrow ۲=\frac{۱+y_C}{۲}\Rightarrow y_C=۳\end{cases}\Rightarrow C\,(-۴,۳)$$

با داشتن شیب قطر AC می‌توان معادلهٔ قطر BD را نوشت:

$$m_{AC}=\frac{۳-۱}{-۴-۲}=-\frac{۱}{۳}\Rightarrow m_{BD}=۳, O\,(-۱,۲)\Rightarrow y-۲=۳\,(x+۱)\Rightarrow y=۳x+۵$$

هر نقطه روی قطر BD ازجمله نقطهٔ B به‌صورت $B\,(x,۳x+۵)$ است. چون AB بر BC عمود است:

$$\begin{matrix}m_{AB}=\frac{۳x+۵-۱}{x-۲}\\ m_{BC}=\frac{۳x+۵-۳}{x+۴}\end{matrix}\Rightarrow m_{AB}.m_{BC}=-۱\Rightarrow\frac{۳x+۴}{x-۲}\times\frac{۳x+۲}{x+۴}=-۱\Rightarrow ۹x^{۲}+۱۸x+۸=-x^{۲}-۲x+۸$$
$$۱۰x^{۲}+۲۰x=۰\Rightarrow x=۰,x=-۲\Rightarrow B\,(-۲,-۱)\,,D\,(۰,۵)$$

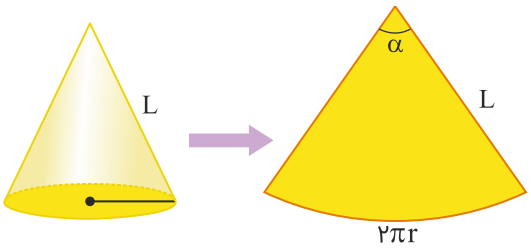
۱۱

$$۴^{۳x+\sqrt{۵}} \times ۴^{-x-\sqrt{۵}} < ۴^{-۳} \Rightarrow ۴^{۲x} < ۴^{-۳} \Rightarrow ۲x < -۳ \Rightarrow x < -\frac{۳}{۲}$$

نکته:

$$a^x < a^y \Rightarrow \begin{cases} x < y & ; a > ۱ \\ x > y & ; ۰ < a < ۱ \end{cases}$$

۱۲ برای این کار مخروط را به‌صورت گسترده در نظر می‌گیریم:



حال مساحت قطاع حاصل را حساب می‌کنیم:

$$۲\pi r = L.\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{۲\pi r}{L}$$

$$S = \frac{۱}{۲}r^۲.\alpha \Rightarrow S = \frac{۱}{۲}L^۲ \times \frac{۲\pi r}{L} \Rightarrow S = \pi r L$$

۱۳

الف

$$fog = \{(۰,۱),(۵,\sqrt{۳})\}$$

ب

$$D_{\frac{f}{g}} = \{۳,۵\}$$

۱۴

$$\frac{۱}{\cos^۲\alpha} = ۱ + \tan^۲\alpha \Rightarrow \frac{۱}{\cos^۲\alpha} = ۱ + \frac{۱}{۴} = \frac{۵}{۴} \Rightarrow \cos^۲\alpha = \frac{۴}{۵}$$

$$\cos ۲\alpha = ۲\cos^۲\alpha - ۱ = ۲ \times (\frac{۴}{۵}) - ۱ = \frac{۳}{۵}$$

(باتوجه‌به اینکه در سؤال در اثر اشکال تایپی به‌جای $-\frac{۱}{۲}$ عدد $\frac{۱}{۲}$ تایپ شده است، در زمان تصحیح چنانچه داوطلب با $\frac{۱}{۲}$ حل نموده است، نمرهٔ کامل منظور گردد.)

پاسخ سؤال ۱۵

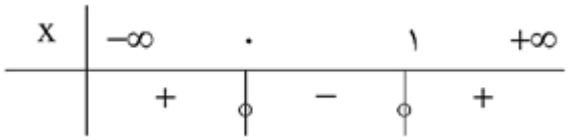
۱۵

$$\cos ۳۰^\circ = ۲\cos^۲ ۱۵^\circ - ۱ \Rightarrow ۲\cos^۲ ۱۵^\circ = ۱ + \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\Rightarrow \cos^۲ ۱۵^\circ = \frac{\sqrt{۳}+۲}{۴} \Rightarrow \cos ۱۵^\circ = \frac{\sqrt{\sqrt{۳}+۲}}{۲}$$

۱۶ برای تساوی دو تابع شرط اول این است که دامنه‌های برابری داشته باشند، پس دامنهٔ هر دو تابع را به دست می‌آوریم، برای تابع f لازم است:

$$x(x-۱) \geq ۰$$



پس دامنهٔ تابع f عبارت است از:

$$D_f = (-\infty, ۰] \cup [۱, +\infty)$$

برای تابع g لازم است:

$$\begin{cases} x \geq ۰ \\ x-۱ \geq ۰ \Rightarrow x \geq ۱ \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک دو ناحیه}} D_g = [۱, +\infty)$$

واضح است که $D_f = D_g$، پس توابع f و g مساوی نیستند.

۱۷

$$f(x) + f(-x) = ۰ \Rightarrow \log\left(\sqrt{ax^۲+۱} + ۲x\right) + \log\left(\sqrt{ax^۲+۱} - ۲x\right) = ۰$$
$$\Rightarrow \log\left(ax^۲ + ۱ - ۴x^۲\right) = ۰ \Rightarrow ax^۲ = ۴x^۲ \Rightarrow a = ۴$$

۱۸

$$\alpha = \frac{l}{r} \Rightarrow ۱/۵ = \frac{l}{۲m} \Rightarrow l = ۳m$$

۱۹ عبارت داخل رادیکال را می‌توانیم به‌صورت مربع کامل بنویسیم:

$$A = \sqrt{(x+۳)^۲} + |۲x-۸| + x = |x+۳| + |۲x-۸| + x$$

ملاحظه می‌شود که ریشه‌های قدرمطلق برابر با $x = -۳$ و $x = ۴$ است. با بازه‌بندی، عبارت A را ساده‌تر می‌نویسیم:

$$x < -۳ \Rightarrow A = (-x-۳) + (-۲x+۸) + x = -۲x + ۵$$

$$-۳ \leq x \leq ۴ \Rightarrow A = (x+۳) + (-۲x+۸) + x = ۱۱$$

$$x > ۴ \Rightarrow A = (x+۳) + (۲x-۸) + x = ۴x - ۵$$

بنابراین به ازای $-۳ \leq x \leq ۴$، حاصل A، مستقل از x است.