



۱ اگر  $f = \{(-1, 2), (-3, a), (-2, 5)\}$  و  $g = \{(-3, -4), (-2, b), (1, -1)\}$  و  $f \times g = \{(-3, \frac{1}{p}), (-2, -5)\}$  باشد، آنگاه حاصل  $\frac{b}{a}$  کدام است؟

حاصل حدهای زیر را بیابید.

$$2 \quad \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{3 - [\cos 2x]}{[\cos x]}$$

$$3 \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - 3x - 4}$$

درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید (با ذکر دلیل).

۴ اگر دامنه دو تابع باهم برابر و برد آنها نیز با یکدیگر برابر باشند، دو تابع برابرند.

۵ برد و هم دامنه تابع می توانند یکی باشند.

۶ هم دامنه تابع زیرمجموعه ای از برد آن است.

۷ بی شمار تابع وجود دارد که دامنه آن بازه  $[0, 3]$  است.

۸ در دنباله حسابی  $\dots, 11, 8, 5$  حداقل چند جمله را باهم جمع کنیم تا حاصل جمع، از ۵۰۰ بیشتر شود؟

۹ اگر  $\sin x - \cos x = -\frac{1}{p}$  باشد، حاصل  $\cos 4x$  را بیابید.

۱۰ توابع  $f(x) = x + 5$  و  $g(x) = \frac{4x}{x^2 - \sqrt{x}}$  داده شده اند.

الف دامنه تابع  $\frac{g}{f}$  را به دست آورید.

ب حاصل  $(f \cdot g)(1)$  را تعیین کنید.

۱۱ اگر حاصل ضرب ریشه های معادله  $0 = (2m - 2)x^2 + mx - m - 1$  برابر ۴ باشد،  $m$  چقدر است؟

۱۲ مجموع ۱۰ جمله اول دنباله هندسی زیر را به دست آورید.

$$\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \dots$$

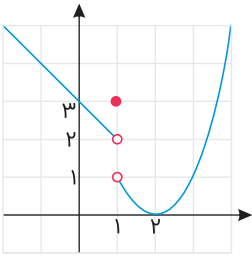
درستی یا نادرستی جملات زیر را مشخص کنید.

۱۳ اگر تابع  $f$  در نقطه  $x = a$  تعریف نشده باشد، در  $a$  حد ندارد.

۱۴ اگر تابع  $f$  در  $x = a$  حد چپ و راست داشته باشد، حد دارد.

۱۵ با استفاده از نمودار زیر، عبارت خواسته شده را (در صورت وجود) مشخص کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) - \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) + 2f(1)$$



۱۶ اگر در معادله درجه دوم  $-x^2 + (m+1)x + 2m = 0$  حاصل ضرب ریشه‌ها برابر ۲ باشد، مجموع ریشه‌ها را بیابید.

۱۷ نمودار تابع  $f(x) = |x^2 - 2x|$  را رسم کنید، سپس به دو روش هندسی و جبری معادله  $|x^2 - 2x| = 2$  را حل نمایید.

۱۸ توابع با ضابطه‌های  $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ ,  $g(x) = \frac{x+5}{x-4}$  مفروض‌اند.

الف دامنه تابع  $g \circ f$  را بدون استفاده از ضابطه آن بیابید.

ب حاصل  $(g \circ g)(3)$  را بیابید.

۱۹ حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 3x - 2}{\sqrt{x+2} - 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \sin 2x}$$

ب

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2x - \pi}{\cos 2x}$$

پ

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2[x] - 18}{x^2 - 3^2x}$$

ت

۲۰ یک پیتزا به قطر ۲۵ سانتی‌متر را به ۸ قسمت مساوی برش می‌دهیم. اندازه کمان روبه‌رو به زاویه مرکزی در هر قطاع چند سانتی‌متر است؟ (پیتزا دایره‌ای فرض شود)

۲۱ قدر نسبت و مجموع  $n$  جمله اول دنباله هندسی زیر را به دست آورید. ( $a = 0$ )

$$a, a, a, \dots, a$$

۲۲ معادله درجه دومی بنویسید که یکی از ریشه‌های آن دو برابر دیگری باشد. مسئله چند جواب دارد؟

حد توابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^\nu - \nu x - 1}{x^\nu - 1}$$

۲۳

$$\lim_{x \rightarrow \nu} \frac{x - \nu}{\sqrt{\nu x} - \nu}$$

۲۴

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1 - \cos \nu x}}{\sin \frac{x}{\nu}}$$

۲۵



۱

$$D_f = \{-1, -3, -2\} \quad , \quad D_g = \{-3, -2, 1\}$$

$$D_{f \times g} = D_f \cap D_g = \{-3, -2\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(-3) = a \\ g(-3) = -4 \\ (f \times g)(-3) = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow -4a = \frac{1}{2} \Rightarrow a = -\frac{1}{8}$$

$$\begin{cases} f(-2) = 5 \\ g(-2) = b \\ (f \times g)(-2) = -5 \end{cases} \Rightarrow 5b = -5 \Rightarrow b = -1 \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{-1}{-\frac{1}{8}} = 8$$

پاسخ سؤالات ۲ تا ۳

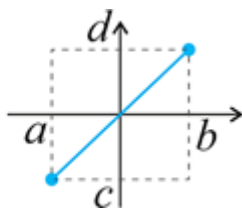
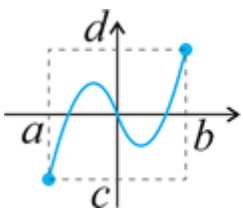
$$\lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{3 - [\cos 2x]}{[\cos x]} = \frac{3 - [\cos 2\pi^+]}{[\cos \pi^+]} = \frac{3 - 0}{-1} = -3$$

$$(*) : [\cos \pi^+] = [-1^+] = -1$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - 3x - 4} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{(x - 4)(x + 1)} \times \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{(x - 4)(x + 1)(\sqrt{x} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{(x + 1)(\sqrt{x} + 2)} \\ &= \frac{1}{(4 + 1)(\sqrt{4} + 2)} = \frac{1}{20} \end{aligned}$$

پاسخ سؤالات ۴ تا ۷

خیر، به عنوان مثال شکل‌های زیر را در نظر بگیرید:



۴

$$\begin{cases} f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = x \end{cases}$$

در این تابع هم دامنه برابر با  $\mathbb{R}$  و برد تابع نیز برابر با  $\mathbb{R}$  است.

نادرست. برد تابع زیرمجموعه‌ای از هم دامنه آن است.

درست. بی‌شمار تابع می‌توان مثال زد که دامنه آن‌ها مجموعه  $[0, 3]$  باشد ولی ضابطه آن‌ها متفاوت باشد، مانند:

$$\begin{cases} f: [0, 3] \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = 2x \end{cases} \quad \begin{cases} g: [0, 3] \rightarrow \mathbb{R} \\ g(x) = 2x^2 + 1 \end{cases} \quad \begin{cases} h: [0, 3] \rightarrow \mathbb{R} \\ h(x) = \frac{1}{3}x - 1 \end{cases}$$

$$S_n > 500 \Rightarrow \frac{n}{2}[2 \times 5 + (n-1) \times 3] > 500 \Rightarrow \frac{n}{2}(3n+7) > 500$$

$$\Rightarrow 3n^2 + 7n > 1000 \Rightarrow 3n^2 + 7n - 1000 > 0$$

باید این عبارت را تعیین علامت کنیم.

$$3n^2 + 7n - 1000 = 0 \Rightarrow n = \frac{-7 \pm \sqrt{12049}}{6} \simeq \frac{-7 \pm 109}{6} \Rightarrow \begin{cases} n_1 \simeq \frac{-116}{6} \\ n_2 \simeq \frac{102}{6} = 17 \end{cases}$$

$n$	$-\frac{116}{6}$	$17$
$3n^2 + 7n - 1000 > 0$	+	+
	-	-

$$\xrightarrow{n > 0} n > 17 \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} n \geq 18$$

بنابراین حداقل باید ۱۸ جمله را با هم جمع کنیم.

$$(\sin x - \cos x)^2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \Rightarrow \underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_1 - \underbrace{2 \sin x \cos x}_{\sin 2x} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 1 - \sin 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin 2x = \frac{1}{2}$$

$$\cos 4x = 1 - 2 \sin^2 2x = 1 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - 2\left(\frac{1}{4}\right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$D_f = \mathbb{R} \text{ و } D_g = \mathbb{R} - \{0, 7\}$$

$$D_{fg} = D_f \cap D_g - \{x | f(x) = 0\} = \mathbb{R} - \{0, -5, 7\}$$

$$(f \cdot g)(1) = f(1) \times g(1) = 6 \times \left(\frac{-6}{6}\right) = -6$$

$$\frac{c}{a} = 6 \Rightarrow \frac{-m-1}{2m-2} = \frac{6}{1} \Rightarrow -m-1 = 6m-6$$

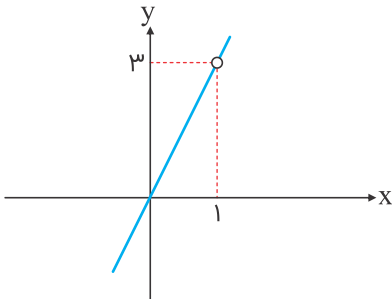
$$\Rightarrow -9m = -7 \Rightarrow m = \frac{7}{9}$$

$$\text{قدر نسبت } q = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}} = 2, \quad S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{\frac{1}{4}(1-2^{10})}{1-2} = \frac{\frac{1}{4}(1-1024)}{-1} = \frac{1023}{4}$$

پاسخ سؤالات ۱۳ تا ۱۴

نادرست. ممکن است تابع در  $x = a$  تعریف نشده باشد ولی دارای حد باشد.

نادرست. باید حد راست و چپ باهم مساوی باشند:

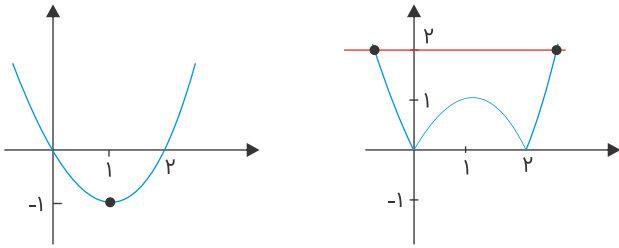


$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) - \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) + 2f(1) = 2 - 1 + 2 \times 3 = 7$$

$$\frac{c}{a} = -2 \Rightarrow \frac{2m}{-1} = -2 \Rightarrow 2m = 2 \Rightarrow m = 1$$

$$-x^2 + 2x + 2 = 0 \Rightarrow \frac{-b}{a} = \frac{-2}{-1} = 2$$



$$|x^2 - 2x| = 2 \Rightarrow x^2 - 2x = \pm 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 4 + 8 = 12 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{12}}{2} = 1 \pm \sqrt{3} \\ x^2 - 2x + 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 4 - 8 = -4 < 0 \text{ ریشه ندارد} \end{cases}$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{2\} \quad D_g = \mathbb{R} - \{4\}$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \left\{x \in \mathbb{R} - \{2\} \mid \frac{x+1}{x-2} \neq 4\right\}$$

$$D_{g \circ f} = \mathbb{R} - \{2, 3\}$$

$$(g \circ g)(3) = g(g(3)) = g(-4) = \frac{1}{-4}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 3x - 2}{\sqrt{x+2} - 2} \times \frac{\sqrt{x+2} + 2}{\sqrt{x+2} + 2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2x^2 - 3x - 2)(\sqrt{x+2} + 2)}{x + 2 - 4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cancel{(x-2)}(2x+1)(\sqrt{x+2} + 2)}{\cancel{x-2}} = \omega(4) = 2 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 x}{x \sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \left(\frac{\sin x}{x} \times x\right)^2}{x \left(\frac{\sin 2x}{2x} \times 2x\right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{2x^2} = 1$$

$$x - \frac{\pi}{4} = y \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + y$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{fx - \pi}{\cos 2x} &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{\pi}{4} + fy - \frac{\pi}{4}}{\cos\left(\frac{\pi}{4} + 2y\right)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{fy}{-\sin 2y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{fy}{1}}{\frac{-\sin 2y}{2y} \times 2y} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{fy}{-2y} = -2 \end{aligned}$$

الف ۱۸

ب

الف ۱۹

ب

ب

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2[x] - 18}{x^2 - 3x} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2[3^-] - 18}{x^2 - 3x} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2x^2 - 18}{x^2 - 3x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{(x-3)(2x+6)}{x(x-3)} = 4$$

$$\hat{\theta} = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{f}$$

$$r = \frac{d}{v} = 12/5 \text{ cm}$$

$$l = r \cdot \theta \Rightarrow l = 12/5 \times \frac{\pi}{f} = 3/125\pi$$

۲۰

قدر نسبت این دنباله ۱ و مجموع n جمله اول آن برابر است با:

۲۱

$$\underbrace{a + a + \dots + a}_{n} = na$$

اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله باشند:

۲۲

$$\alpha = 2\beta \Rightarrow P = \alpha\beta = 2\beta^2$$

$$S = \alpha + \beta = 3\beta \Rightarrow x^2 - 3\beta x + 2\beta^2 = 0$$

مسئله بی‌نهایت جواب دارد (به ازای تمام مقادیری که می‌توان به جای  $\beta$  قرار داد).

پاسخ سؤالات ۲۳ تا ۲۵

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 2x - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^2 - x - 1)(x + 1)}{(x - 1)(x + 1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 1}{x - 1} = \frac{1}{-2}$$

۲۳

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{\sqrt{2x} - 2} \times \frac{\sqrt{2x} + 2}{\sqrt{2x} + 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(\sqrt{2x} + 2)}{2x - 4}$$

۲۴

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(\sqrt{2x} + 2)}{2(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x} + 2}{2} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1 - \cos 2x}}{\sin \frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|\sqrt{2} \sin x|}{\sin \frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{2} \sin x}{\sin \frac{x}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2}$$

۲۵