۱ مکعب لگاریتم یک عدد با لگاریتم مجذور آن برابر است. این عدد را به دست آورید.

۲ اگر $\log 2 = a$ و $\log 3 = b$ باشد، حاصل عبارت زیر را برحسب a و b پیدا کنید.

$$3\log \sqrt[3]{3} + 3\log 15 + 5\log \sqrt[5]{4}$$

۳ نمودار تابع $f(x) = x[x]$ را در بازهٔ $[-1, 2)$ رسم کنید.

۴ فاصلهٔ نقطهٔ $A(1\,, \,-2)$ از خط $4x - 3y = k$ برابر ۵ است. مقدار k را به دست آورید.

۵ معادلات زیر را به روش هندسی حل کنید و تعداد جواب‌ها را معین کنید.

الف
$$\left|x^2 - 6x\right| = 2x - |x|$$

ب
$$x - \frac{x}{|x|} = |x - 1|$$

درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید (با ذکر دلیل).

۶ لگاریتم اعداد مثبت کمتر از یک، همواره عددی مثبت است.

۷ نمودار دو تابع $y = 3^x$ و $y = \log_3^x$ نسبت به نیمساز ربع اول و سوم قرینه‌اند.

۸ مقدار تابع لگاریتم، می‌تواند منفی باشد.

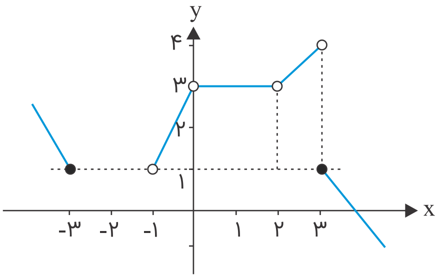
۹ برد تابع $y = \log_5^{\sqrt{x}}$ مجموعهٔ اعداد حقیقی است.

۱۰ در یک دنبالهٔ حسابی، داریم: $a_2 + a_3 + a_5 + a_6 + a_8 + a_9 = 126$. حاصل S_{10} را بیابید.

۱۱ نقاط $A(m, 2m + 1)$ و $B(2m, -m + 3)$ را در نظر بگیرید. مقدار m را طوری تعیین کنید که وسط پاره‌خط AB روی نیمساز ناحیهٔ دوم و چهارم باشد.

۱۲ بازه‌های پیوستگی تابع $y = \dfrac{x^2 - x}{x^3 - 8}$ را بیابید.

۱۳ باتوجه‌به نمودار تابع f، حدود خواسته‌شده را در صورت وجود به دست آورید.



الف
$$\lim_{x \to (-3)^-} f(x)$$

ب
$$\lim_{x \to (-۱)^-} f(x)$$

پ
$$\lim_{x \to ۲^+} f(x)$$

ت
$$\lim_{x \to ۳} f(x)$$

۱۴ نقطه‌ای روی خط $y = ۲x$ بیابید که از دو نقطهٔ $A\,(۱, ۱)$ و $B\,(۳, -۱)$ به یک فاصله باشد.

۱۵ اگر $\sin^۴ x + \cos^۴ x = a$ باشد، حاصل عبارت $\dfrac{\sin^۸ x - \cos^۸ x}{\cos ۴x}$ را برحسب a تعیین کنید.

۱۶ دامنهٔ تابع $f\,(x) = \sqrt{\log_۲^x - \frac{۲}{۳}x + \frac{۲}{۳}}$ را تعیین کنید.

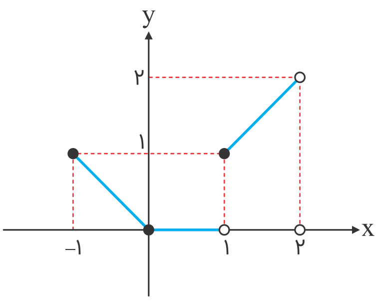
۱

$$(\log x)^{۳} = \log x^{۲} \Rightarrow (\log x)^{۳} - ۲\log x = ۰ \Rightarrow \log x\left((\log x)^{۲} - ۲\right) = ۰$$
$$\Rightarrow \log x = ۰ \Rightarrow x = ۱$$
$$(\log x)^{۲} = ۲ \Rightarrow \log x = \pm\sqrt{۲} \Rightarrow x = ۱۰^{\sqrt{۲}}, ۱۰^{-\sqrt{۲}}$$

۲

$$۳\log\sqrt[۳]{۳} + ۳\log ۱۵ + ۵\log\sqrt[۵]{۴} = ۳\log ۳^{\frac{۱}{۳}} + ۳\log(۳\times ۵) + ۵\log ۲^{\frac{۲}{۵}}$$
$$= ۳\times\frac{۱}{۳}\log ۳ + ۳\log ۳ + ۳\log ۵ + ۵\times\frac{۲}{۵}\log ۲$$
$$= \log ۳ + ۳\log ۳ + ۳\log ۵ + ۲\log ۲ = ۴\log ۳ + ۳(۱-\log ۲) + ۲\log ۲$$
$$= ۴\log ۳ - \log ۲ + ۳ = ۴b - a + ۳$$

۳



$$-۱\le x < ۲ \Rightarrow \begin{cases} -۱\le x < ۰ \Rightarrow [x] = -۱ : f(x) = -x & \begin{array}{|c|c} -۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ \end{array} \\ ۰\le x < ۱ \Rightarrow [x] = ۰ : f(x) = ۰ & \begin{array}{|c|c} ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{array} \\ ۱\le x < ۲ \Rightarrow [x] = ۱ : f(x) = x & \begin{array}{|c|c} ۱ & ۲ \\ ۱ & ۲ \end{array} \end{cases}$$

۴

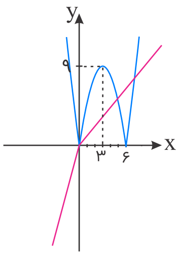
فاصلهٔ نقطهٔ $A(۱\,,\,-۲)$ از خط $۴x-۳y-k=۰$ از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$AH = \frac{|a(x_{۰}) + b(y_{۰}) + c|}{\sqrt{a^{۲}+b^{۲}}} = \frac{|۴(۱) - ۳(-۲) - k|}{\sqrt{(۴)^{۲} + (-۳)^{۲}}} = \frac{|۱۰-k|}{\sqrt{۹+۱۶}} = \frac{|۱۰-k|}{۵}$$
$$\Rightarrow \frac{|۱۰-k|}{۵} = ۵ \Rightarrow |۱۰-k| = ۲۵ \Rightarrow \begin{cases} ۱۰-k = ۲۵ \Rightarrow k = -۱۵ \\ ۱۰-k = -۲۵ \Rightarrow k = ۳۵ \end{cases}$$

۵

الف

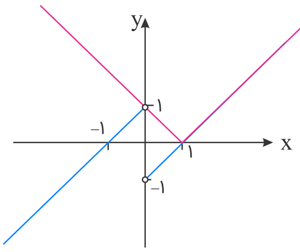
$$|x^{۲} - ۶x| = ۲x - |x| \Rightarrow \begin{cases} y = |x^{۲} - ۶x + ۹ - ۹| = \left|(x-۳)^{۲} - ۹\right| \\ y = ۲x - |x| = \begin{cases} x & x \geq ۰ \\ ۳x & x < ۰ \end{cases} \end{cases}$$



معادله سه جواب دارد.

ب

$$x - \frac{x}{|x|} = |x - ۱| \Rightarrow \begin{cases} y = x - \frac{x}{|x|} = \begin{cases} x - ۱ & x > ۰ \\ x + ۱ & x < ۰ \end{cases} \\ y = |x - ۱| \end{cases}$$



باتوجه‌به شکل، معادله بی‌شمار جواب به‌صورت بازهٔ $[۱, +\infty)$ دارد.

پاسخ سؤالات ۶ تا ۹

۶ نادرست. به مثال نقض زیر توجه کنید:

$$\log_{۲}^{۰/۵} = -۱$$

۷ نکته: وارون تابع نمایی با ضابطهٔ $f(x) = a^x$ را به‌صورت $f^{-۱}(x) = \log_a^x$ نشان می‌دهیم.

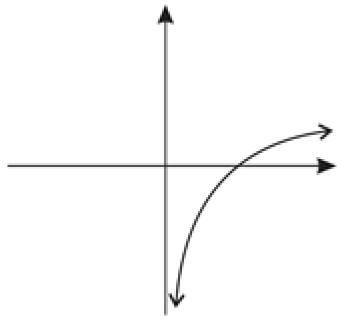
نکته: هر تابع و وارون آن نسبت به خط $y = x$ قرینه‌اند.

درست. باتوجه‌به نکات، $y = ۳^x$ و $y = \log_{۳}^x$ وارون یکدیگرند؛ درنتیجه نسبت به نیمساز ربع اول و سوم قرینه‌اند.

۸ درست. برد تابع لگاریتم $y = \log_a^x$ مجموعهٔ اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ است.

۹ نکته: نمودار تابع $y = \log_a^x$ که در آن $a > ۱$، در حالت کلی به‌صورت زیر است:

درست است زیرا برد تابع $y = \log_a^{\sqrt{x}} = \frac{۱}{۲}\log_a^x$ همانطورکه از نمودار مشخص است، مجموعه اعداد حقیقی است.



۱۰ طبق قانون اندیس‌ها، اگر در یک دنبالهٔ حسابی، $m+n=p+q$ باشد، داریم: $a_m+a_n=a_p+a_q$

$$a_۲+a_۳+a_۵+a_۶+a_۸+a_۹=۱۲۶$$
$$\Rightarrow a_۲+a_۹=a_۳+a_۸=a_۵+a_۶$$
$$\Rightarrow ۳(a_۲+a_۹)=۱۲۶ \Rightarrow a_۲+a_۹=۴۲$$
$$\Rightarrow a_۲+a_۹=a_۱+a_{۱۰}=۴۲$$

$$S_{۱۰}=\frac{۱۰}{۲}(a_۱+a_{۱۰})=۵\times ۴۲=۲۱۰$$

۱۱

$$(\text{وسط } AB)\ M=\left(\frac{m+۲m}{۲},\frac{m+۴}{۲}\right)$$

$y=-x$: نیمساز ناحیهٔ دوم و چهارم

$$\Rightarrow \frac{m+۴}{۲}=-\frac{۳m}{۲}\Rightarrow ۴m+۴=۰\Rightarrow m=-۱$$

۱۲

$$x^۳-۸=۰\Rightarrow x=۲\ \text{ریشهٔ مخرج}\Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{۲\}$$

بازه‌های پیوستگی $=(-\infty,۲)\ ,\ (۲,+\infty)$

۱۳

الف ۱

ب وجود ندارد

پ ۳

ت

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۳^-} f(x)=۴\\ \lim\limits_{x\to ۳^+} f(x)=۱\end{cases}\Rightarrow \lim_{x\to ۳} f(x)=\ \text{وجود ندارد}$$

۱۴ فرض کنیم نقطهٔ موردنظر $M\ (a,۲a)$ باشد، آنگاه داریم:

$$AM=\sqrt{(a-۱)^۲+(۲a-۱)^۲}\quad ,\quad BM=\sqrt{(a-۳)^۲+(۲a+۱)^۲}$$

باتوجه‌به تساوی $AM=BM$ خواهیم داشت:

$$\sqrt{(a-۱)^۲+(۲a-۱)^۲}=\sqrt{(a-۳)^۲+(۲a+۱)^۲}$$
$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}}(a-۱)^۲+(۲a-۱)^۲=(a-۳)^۲+(۲a+۱)^۲\Rightarrow a^۲-۲a+۱+۴a^۲-۴a+۱=a^۲-۶a+۹+۴a^۲+۴a+۱$$
$$-۶a+۲=-۲a+۱۰\Rightarrow -۴a=۸\Rightarrow a=-۲\Rightarrow M\ (-۲,-۴)$$

۱۵

$$\sin^۴ x + \cos^۴ x = (\sin^۲ x + \cos^۲ x)^۲ - ۲\sin^۲ x\cos^۲ x = ۱ - \frac{۱}{۲}\sin^۲ ۲x = a$$

$$\Rightarrow \sin^۲ ۲x = ۲ - ۲a$$

$$\frac{(\sin^۴ x - \cos^۴ x)(\sin^۴ x + \cos^۴ x)}{۱ - ۲\sin^۲ ۲x} = \frac{\overbrace{(\sin^۲ x + \cos^۲ x)}^{۱}\overbrace{(\sin^۲ x - \cos^۲ x)}^{-\cos ۲x} \times a}{۱ - ۲(۲ - ۲a)} = \frac{-a\cos ۲x}{۴a - ۳}$$

$$\sin^۲ ۲x + \cos^۲ ۲x = ۱ \Rightarrow ۲ - ۲a + \cos^۲ ۲x = ۱ \Rightarrow \cos ۲x = \pm\sqrt{۲a - ۱}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin^۸ x - \cos^۸ x}{\cos ۴x} = \frac{\pm a\sqrt{۲a - ۱}}{۴a - ۳}$$

نکته:

$$۱)\ \cos^۲ x - \sin^۲ x = \cos ۲x$$

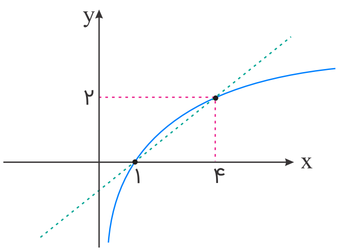
$$۲)\ \cos ۲x = ۱ - ۲\sin^۲ x = ۲\cos^۲ x - ۱$$

۱۶

عبارت زیر رادیکال باید نامنفی باشد، پس:

$$\log_۲^x - \frac{۲}{۳}x + \frac{۲}{۳} \geq ۰ \Rightarrow \log_۲^x \geq \frac{۲x - ۲}{۳}$$

برای حل نامعادلهٔ به‌دست‌آمده، از روش هندسی استفاده می‌کنیم.



با کمی دقت و مقداردهی به طرفین نامعادله می‌توان فهمید که هر دو نمودار از نقاط $(۱, ۰)$ و $(۴, ۲)$ می‌گذرند.
پس جواب نامعادله بازهٔ $[۱, ۴]$ است و $D_f = [۱, ۴]$.