



درستی یا نادرستی جملات زیر را مشخص کنید.

- ۱ اگر تابع f در نقطه $x = a$ تعریف نشده باشد، در a حد ندارد.
- ۲ اگر $r > 0$ باشد، بازه $(a, a + r)$ یک همسایگی راست عدد a نامیده می‌شود.
- ۳ اگر تابع f در $x = a$ حد چپ و حد راست داشته باشد، در آن حد دارد.
- ۴ مجموعه $(-4, 2) \cup (2, 4)$ یک همسایگی محذوف عدد ۲ است.
- ۵ اگر $f = \{(1, -1), (3, 2), (2, -2), (-3, 0)\}$ ، $g = \{(0, 3), (2, -2), (3, 1), (1, 0)\}$ دو تابع باشند:

الف دامنه تابع $\frac{f}{g}$ را بنویسید.

ب تابع $\frac{f}{g}$ را به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب بنویسید.

پ $f \circ g(3)$ را به دست آورید.

ت $g^{-1} \circ g(2)$ را به دست آورید.

۶ $f(x) = \begin{cases} x+2 & ; x \geq 1 \\ \sqrt{1-x} & ; x < 1 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & ; x \geq 0 \\ 2^x & ; x < 0 \end{cases}$ مفروض است.

الف توابع $f + g$ و $\frac{f}{g}$ را تشکیل دهید.

ب تابع $f \circ g$ را به دست آورید.

۷ تابع $f(x) = 3^x$ را در نظر بگیرید.

الف برد تابع را بنویسید.

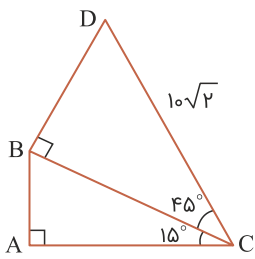
ب وارون تابع $f(x)$ چیست؟

حاصل حدهای زیر را به دست آورید.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sqrt{3} \sin x - \cos x}{6x - \pi}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} (\sqrt{x+1} - 2) \tan \frac{\pi x}{6}$$

۱۰ در شکل زیر، طول ضلع AB را حساب کنید.



حدهای زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\left[\frac{x}{\sin x} \right] - \left[-\frac{2 \sin x}{x} \right] \right)$$

۱۱

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|\sin x| + 2x + x^2}{x}$$

۱۲

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} ([x] + [-x]) \left(\frac{1 - \cos \sqrt{x}}{x} \right)$$

۱۳

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x \sin x}{(x - 2x^2)^2}$$

۱۴

معادله خط $2x + y = 8$ بر دایره‌ای به شعاع $\sqrt{5}$ مماس است. مرکز این دایره بر روی خطی به معادله $y = 2x - 1$ قرار دارد. مرکز دایره را بیابید.

۱۵

اگر a, b, c سه جمله متوالی از یک دنباله حسابی با قدر نسبت d باشند، ثابت کنید:

۱۶

$$\frac{\cos a - \cos c}{\sin a - \sin c} = -\tan b$$

معادله زیر را حل کنید.

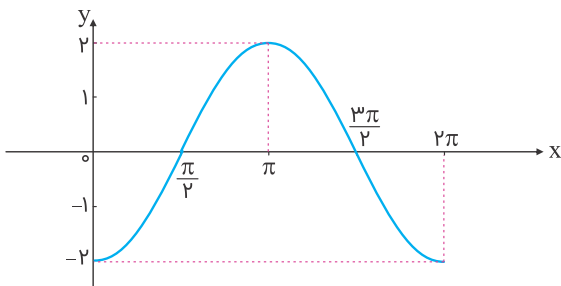
۱۷

$$\log_{\mu}^{(\mu^{x-1}-1)} \times \log_{\mu}^{(\mu^x-\mu)} = 6$$

کدامیک از ضابطه‌های داده‌شده، مربوط به نمودار رسم‌شده می‌باشد؟

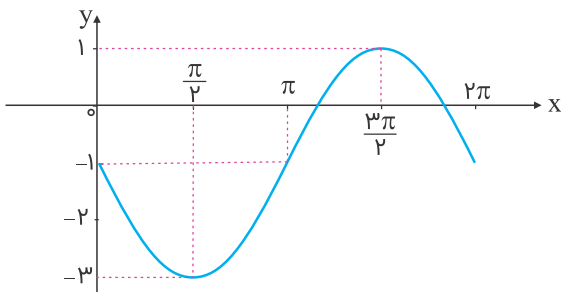
۱۸

(الف) $y = 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$
 (ب) $y = 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$



۱۹

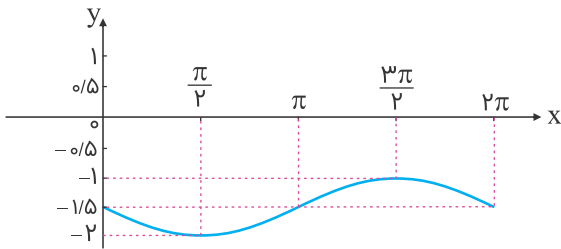
(الف) $y = -2 \sin x + 1$
 (ب) $y = -2 \sin x - 1$



۲۰

$$y = -\frac{1}{2} \sin x + \frac{3}{2} \quad \text{(الف)}$$

$$y = -\frac{1}{2} \sin x - \frac{3}{2} \quad \text{(ب)}$$



۲۱ نقاط $A(m, 2m + 1)$ و $B(2m, -m + 3)$ را در نظر بگیرید. مقدار m را طوری تعیین کنید که وسط پاره خط AB روی نیمساز ناحیه دوم و چهارم باشد.

۲۲ در یک دنباله هندسی با قدر نسبت 2 ، مجموع مربعات هشت جمله اول 771 برابر مجموع هشت جمله اول است. پنج جمله اول این دنباله را بنویسید.

۲۳ اگر α و β ریشه‌های معادله $-x^2 + 4x - 3 = 0$ باشند، بدون حل معادله حاصل عبارات زیر را بیابید.

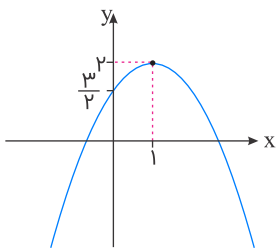
الف

$$\frac{2\alpha\beta}{\alpha + \beta}$$

ب

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$$

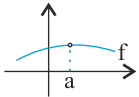
۲۴ اگر نمودار سهمی $f(x) = ax^2 + bx + c$ به صورت زیر باشد، ضابطه سهمی را مشخص کنید.





پاسخ سؤالات ۱ تا ۴

۱ نادرست. برای این که تابع f در a حد داشته باشد، لزومی ندارد $f(a)$ موجود باشد. مثلاً در شکل زیر f در a حد دارد ولی در آن تعریف نمی‌شود.



۲ درست.

۳ نادرست. باید حد چپ و راست باهم مساوی باشند.

۴ درست.

$$D_{f/g} = D_f \cap D_g - \{x | g(x) = 0\} = \{3, 2\}$$

$$\frac{f}{g} = \{(3, 2), (2, 1)\}$$

$$f \circ g(3) = f(g(3)) = f(1) = -1$$

$$g^{-1} \circ f(2) = g^{-1}(f(2)) = g^{-1}(-2) = 2$$

۶ الف چون دامنه‌های ضابطه‌ها در f و g یکسان نیست باید بنویسیم:

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & ; x \geq 1 \\ \sqrt{1-x} & ; 0 \leq x < 1 \\ \sqrt{1-x} & ; x < 0 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} x^2-1 & ; x \geq 1 \\ x^2-1 & ; 0 \leq x < 1 \\ 2^x & ; x < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (f+g)(x) = \begin{cases} x^2+x+1 & ; x \geq 1 \\ x^2-1+\sqrt{1-x} & ; 0 \leq x < 1 \\ \sqrt{1-x}+2^x & ; x < 0 \end{cases}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \begin{cases} \frac{x+2}{x^2-1} & ; x > 1 \\ \frac{\sqrt{1-x}}{x^2-1} & ; 0 \leq x < 1 \\ \frac{\sqrt{1-x}}{2^x} & ; x < 0 \end{cases}$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \begin{cases} f(x^{\sqrt{2}} - 1) & ; x \geq 0 \\ f(2^x) & ; x < 0 \end{cases}$$

$$f(x^{\sqrt{2}} - 1) = \begin{cases} x^{\sqrt{2}} + 1 & ; x^{\sqrt{2}} - 1 \geq 1 \Rightarrow |x| \geq \sqrt{2} \\ \sqrt{2 - x^{\sqrt{2}}} & ; x^{\sqrt{2}} - 1 < 1 \Rightarrow |x| < \sqrt{2} \end{cases}$$

$$f(2^x) = \begin{cases} 2^x + 2 & ; 2^x \geq 1 \Rightarrow x \geq 0 \\ \sqrt{1 - 2^x} & ; 2^x < 1 \Rightarrow x < 0 \end{cases}$$

حال باید بین دامنه $f(x^{\sqrt{2}} - 1)$ و $x \geq 0$ اشتراک بگیریم؛ اشتراک دامنه ضابطه بالای $f(x^{\sqrt{2}} - 1)$ با $x \geq 0$ می شود $x \geq \sqrt{2}$ ، اشتراک دامنه ضابطه پایینی با $x \geq 0$ می شود $0 \leq x < \sqrt{2}$ ، اشتراک بین $f(2^x)$ با $x < 0$ می شود $x < 0$ ، پس می نویسیم:

$$f(g(x)) = \begin{cases} x^{\sqrt{2}} + 1 & ; x \geq \sqrt{2} \\ \sqrt{2 - x^{\sqrt{2}}} & ; 0 \leq x < \sqrt{2} \\ \sqrt{1 - 2^x} & ; x < 0 \end{cases}$$

$$R = (0, +\infty)$$

$$f^{-1}(x) = \log_2 x$$

پاسخ سؤالات ۸ تا ۹

$$\begin{aligned} \sqrt{3} \sin x - \cos x &= 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x \right) \\ &= 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} \sin x - \sin \frac{\pi}{6} \cos x \right) = 2 \sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right) \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right)}{6 \left(x - \frac{\pi}{6} \right)} \Rightarrow x - \frac{\pi}{6} = t \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2 \sin t}{6t} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} (\sqrt{x+1} - \sqrt{2}) \tan \frac{\pi x}{6} = \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2}}{\cot \frac{\pi x}{6}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2}}{\cot \frac{\pi x}{6}} \times \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{2}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{2}} = \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{x - \sqrt{2}}{\sqrt{6} \cot \frac{\pi x}{6}}$$

$$x - \sqrt{2} = t \Rightarrow \begin{cases} x \rightarrow \sqrt{2} : t \rightarrow 0 \\ x = t + \sqrt{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sqrt{6} \cot \frac{\pi(t + \sqrt{2})}{6}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sqrt{6} \cot(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi t}{6})}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{-\sqrt{6} \tan \frac{\pi t}{6}} = -\frac{1}{\sqrt{6}} \times \frac{1}{\frac{\pi}{6}} = -\frac{\sqrt{3}}{2\pi}$$

نکته:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{bx} = \frac{a}{b} \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax}{\tan bx} = \frac{a}{b}$$

$$\triangle DBC : \cos 45^\circ = \frac{BC}{DC} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{BC}{10\sqrt{2}} \Rightarrow BC = 10$$

$$\triangle ABC : \sin 15^\circ = \frac{AB}{BC} \Rightarrow AB = 10 \sin 15^\circ$$

$$\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

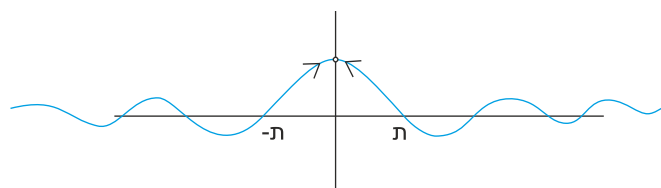
$$\Rightarrow AB = 10 \sin 15^\circ = 10 \times \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = \frac{5}{2}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$$

پاسخ سؤالات ۱۱ تا ۱۴

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin x}{x} \right] = [1^-] = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{x}{\sin x} \right] = [1^+] = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[-\sqrt{\frac{\sin x}{x}} \right] = [-\sqrt{1^-}] = [(-1)^+] = -1 \Rightarrow 1 - (-1) = 2$$

نمودار $y = \frac{\sin x}{x}$ در زیر رسم شده است. به سادگی دیده می‌شود که $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin x}{x} \right] = [1^-] = 1$



$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{|\sin x|}{x} + \sqrt{2} + x \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(-\frac{\sin x}{x} + \sqrt{2} + x \right) = -1 + \sqrt{2} + 0 = \sqrt{2} - 1$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} ([x] + [-x]) &= -1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos \sqrt{x}}{x} \times \underbrace{\frac{1 + \cos \sqrt{x}}{1 + \cos \sqrt{x}}}_1 \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos^2 \sqrt{x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 \sqrt{x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2} \left(\frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right)^2 = \frac{1}{2} \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} ([x] + [-x]) \left(\frac{1 - \cos \sqrt{x}}{x} \right) &= -1 \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x \sin x}{x^2 (1 - 2x)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} \times \frac{\sin x}{x} \times \frac{1}{(1 - 2x)^2} = 2 \times 1 \times 1 = 2$$

تمام نقاط روی خط به معادله $y = 2x - 1$ ، به صورت $(\alpha, 2\alpha - 1)$ قرار دارد. فاصله مرکز دایره تا خط مفروض، برابر $\sqrt{5}$ است. پس:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y - 1 = 0 \\ (\alpha, 2\alpha - 1) \end{cases} &\Rightarrow \frac{|2(\alpha) + (2\alpha - 1) - 1|}{\sqrt{4 + 1}} = \sqrt{5} \\ \Rightarrow \frac{|4\alpha - 2|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} &\Rightarrow |4\alpha - 2| = 5 \\ \Rightarrow \begin{cases} 4\alpha - 2 = 5 \Rightarrow \alpha = \frac{7}{4} \\ 4\alpha - 2 = -5 \Rightarrow \alpha = -\frac{3}{4} \end{cases} \end{aligned}$$

مرکز دایره دو نقطه می‌تواند باشد: $(1, 1)$ و $(\frac{7}{4}, 6)$

$a, b, c \xrightarrow{\text{دنباله حسابی}} a, a + d, a + 2d$

$$\begin{aligned} \frac{\cos a - \cos c}{\sin a - \sin c} &= \frac{\cos a - \cos(a + 2d)}{\sin a - \sin(a + 2d)} = \frac{\cos a - \cos a \cos 2d + \sin a \sin 2d}{\sin a - \sin a \cos 2d - \cos a \sin 2d} \\ &= \frac{\cos a(1 - \cos 2d) + \sin a \sin 2d}{\sin a(1 - \cos 2d) - \cos a \sin 2d} = \frac{\cos a(2\sin^2 d) + \sin a \sin 2d}{\sin a(2\sin^2 d) - \cos a \sin 2d} \\ &= \frac{2\sin d(\cos a \sin d + \sin a \cos d)}{-2\sin d(\cos a \cos d - \sin a \sin d)} = \frac{\sin(a + d)}{-\cos(a + d)} = -\tan(a + d) = -\tan b \end{aligned}$$

نکته:

۱) $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

۲) $\cos(a + d) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

۳) $1 - \cos 2x = 2\sin^2 x$

۴) $1 + \cos 2x = 2\cos^2 x$

$$\log_{\sqrt{3}}(\sqrt{3}^{x-1}) \times \log_{\sqrt{3}}(\sqrt{3}^{x-3}) = 6 \Rightarrow \log_{\sqrt{3}}^{\sqrt{3}^{x-1}-1} \times \log_{\sqrt{3}}^{\sqrt{3} \times (\sqrt{3}^{x-1}-1)} = 6$$

$$\Rightarrow \log_{\sqrt{3}}^{\sqrt{3}^{x-1}-1} \times (1 + \log_{\sqrt{3}}^{\sqrt{3}^{x-1}-1}) = 6$$

$$\log_{\sqrt{3}}^{\sqrt{3}^{x-1}-1} = a \Rightarrow a(a+1) = 6 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = -3 \end{cases}$$

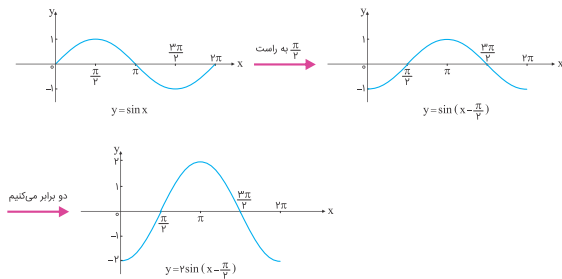
$$\log_{\sqrt{3}}^{\sqrt{3}^{x-1}-1} = 2 \Rightarrow \sqrt{3}^{x-1} - 1 = 9 \Rightarrow \sqrt{3}^{x-1} = 10 \Rightarrow x - 1 = \log_{\sqrt{3}}^{10} \Rightarrow x = 1 + \log_{\sqrt{3}}^{10}$$

$$\log_{\sqrt{3}}^{\sqrt{3}^{x-1}-1} = -3 \Rightarrow \sqrt{3}^{x-1} - 1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \sqrt{3}^{x-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow x - 1 = \log_{\sqrt{3}}^{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}} \Rightarrow x = 1 + \log_{\sqrt{3}}^{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}}$$

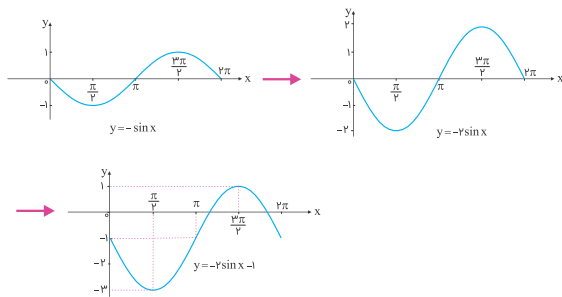
پاسخ سؤالات ۱۸ تا ۲۰

ضابطه قسمت الف مربوط به نمودار رسم شده است، زیرا:



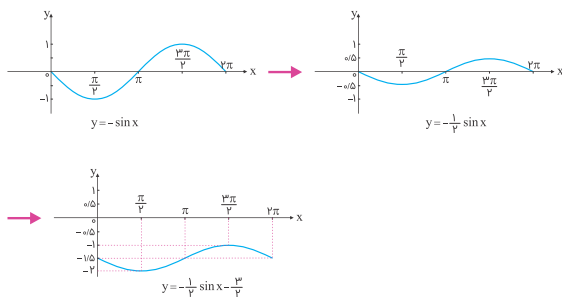
ضابطه قسمت ب مربوط به نمودار رسم شده است، زیرا:

چون در مرحله آخر یک واحد به پایین منتقل شده است، بنابراین ضابطه نمودار به صورت $y = -2 \sin x - 1$ است.



ضابطه قسمت ب مربوط به نمودار رسم شده است، زیرا:

چون $\frac{3}{4}$ به پایین منتقل شده است، بنابراین ضابطه $y = -\frac{1}{4} \sin x - \frac{3}{4}$ مربوط به نمودار است.



$$(AB \text{ وسط}) M = \left(\frac{m+2m}{2}, \frac{m+4}{2} \right)$$

نیمساز ناحیه دوم و چهارم: $y = -x$

$$\Rightarrow \frac{m+4}{2} = -\frac{3m}{2} \Rightarrow 4m+4=0 \Rightarrow m=-1$$

جملات دنباله را به صورت $a, -2a, 4a, \dots$ و مربعات جملات را به صورت $a^2, 4a^2, 16a^2, \dots$ در نظر می‌گیریم.

$$\frac{S'_n}{S_n} = \frac{\frac{a^2(1-4^n)}{1-4}}{\frac{a(1-2^n)}{1+2}} = \frac{a(1+2^n)(1-2^n)}{-1(1-2^n)} = -a(1+2^n) = 771 \Rightarrow a = -3$$

$$-3, 6, -12, 24, -48$$

۲۳ الف

$$\frac{2\alpha\beta}{\alpha + \beta} = \frac{2\left(\frac{c}{a}\right)}{\frac{-b}{a}} \Rightarrow \frac{2c}{-b} = \frac{-6}{-4} = \frac{3}{2}$$

ب

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{-b}{c} = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}$$

۲۴

نکته: در سهمی $y = ax^2 + bx + c$ ، نقطه‌ای به طول $x = -\frac{b}{2a}$ رأس سهمی است.

$$x = -\frac{b}{2a} \Rightarrow 1 = -\frac{b}{2a} \Rightarrow 2a + b = 0$$

$$(1, 2) \in f \Rightarrow a + b + c = 2$$

$$\left(0, \frac{3}{2}\right) \in f \Rightarrow c = \frac{3}{2}$$

$$a = -\frac{1}{2}, b = 1 \text{ می‌رسیم که پس از حل داریم: } \begin{cases} 2a + b = 0 \\ a + b = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ از سه مورد بالا به دستگاه}$$

پس ضابطه سهمی به صورت $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2}$ است.