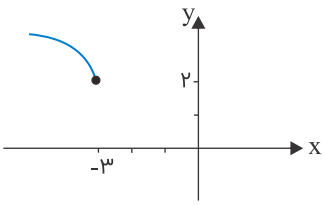
**۱** اگر نمودار تابع $f(x) = \sqrt{-x+a} - b$ به شکل زیر باشد، ضابطه تابع وارون را بدست آورید.

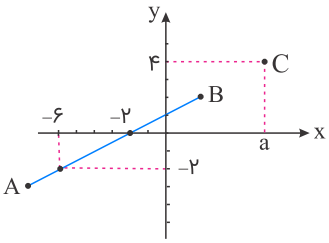



درستی اتحادهای زیر را ثابت کنید.

**۲**

$$\sin ۲x = \frac{۲\tan x}{۱+\tan^{۲}x}$$

**۳** به ازای چه مقدار $a$، باتوجه‌به شکل زیر، امتداد خط $AB$، نقطهٔ $C$ را قطع می‌کند؟




**۴** به ازای چه مقدار $k$ معادلهٔ $\frac{۱}{x-۲} + \frac{۸}{k} = \frac{۳x}{x+۲}$ دارای جواب $x = ۱$ است؟

**۵** اگر $\frac{\pi}{۲} < x < \pi$ و داشته باشیم: $\cot x - \tan x = -۲$، مقدار $\sin x - \cos x$ را محاسبه کنید.

**۶** به ازای چه مقداری از $a$ و $b$ تابع زیر در $x = ۰$ پیوسته است؟

$$F(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{۱-\cos ۶x}}{\sqrt{۲}\sin ax} & ;x > ۰ \\ ۳ & ;x = ۰ \\ \frac{\sqrt{۴+x}-۲}{bx} & ;x < ۰ \end{cases}$$

در جاهای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید.

**۷** اگر $f = \{(۲, ۳), (۳, ۵)\}$ باشد، حاصل $f^{-۱}(۳)$ برابر ..... است.

**۸** اگر $f(x) = x^{۲} + ۴x + ۲$ و $(fog)(x) = x^{۲} + ۶x + ۷$، مطلوب است تعیین تابع $g(x)$.

**۹** در دنبالهٔ حسابی $-۱, ۲, ۵, \ldots$ حداقل چند جملهٔ آن را باید باهم جمع کنیم تا حاصل از ۱۲۵ بیشتر شود؟

**۱۰** اگر $f(x) = ax + b \; ; a \neq ۰$ باشد، در چه صورت، تابع $f^{-۱}$ بر تابع $f$ منطبق خواهد بود؟

**۱۱** نمودار تابع $f$ را به گونه‌ای رسم کنید که در یک همسایگی محذوف نقطه $x = ۳$ تعریف شود ولی در این نقطه حد نداشته باشد.

حاصل حدود زیر را حساب کنید.

**۱۲**

$$\lim_{x \to (\frac{\pi}{۴})^-} \frac{\sqrt{۱ - \sin ۲x}}{\tan x - ۱}$$

**۱۳**

$$\lim_{x \to ۰^-} \frac{\sqrt{۱ - \cos ۲x}}{x[x]}$$

**۱۴**

$$\lim_{x \to ۰} \frac{\tan x - \sin x}{x^۳}$$

**۱۵** معادلات زیر را حل کنید.

الف) $|x - ۱| + |x - ۳| = |۳ - ۳x|$

ب) $|x - ۱| + |x - ۲| = |۲x - ۳|$

پ) $|x - ۵| + |۴ - ۲x| = |۳x - ۹|$

**۱۶** اگر به بزرگی یک زلزله $\frac{۲}{۳}$ ریشتر اضافه شود، انرژی آزادشدهٔ آن چه تغییری می‌کند؟ $(\log E = ۱۱/۸ + ۱/۵M)$

**۱۷** حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ $x^۲ + ۷x = \sqrt{۲x^۲ + ۱۰x + ۱۲} + ۲x - ۶$ را بیابید.

**۱۸** معادلهٔ $\log_{\frac{۵}{۵}}^{\frac{x^۴ - x^۳ + x - ۱}{x^۲ - x + ۱}} = ۳x + ۳$ را حل کنید.

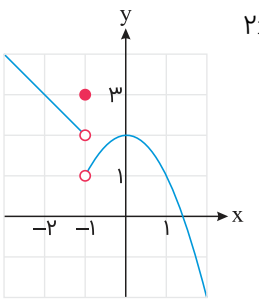
**۱۹** فاصلهٔ دو خط $\frac{۴}{۹}x + \frac{y}{۳} - ۱ = ۰$ و $۳y = -۴x - ۳$ را به دست آورید و معادلهٔ خطی که با این دو خط موازی می‌باشد و از دو خط به یک فاصله است را بیابید.

**۲۰** اگر توابع $f(x) = \sqrt{x + ۷}$ و $g(x) = x^۲ - ۱$ باشند، مطلوب است:

الف) محاسبهٔ مقدار $(g + ۲f)(۲)$

ب) تعیین دامنهٔ $f$ و $g$ و دامنهٔ $\frac{f}{g}$ (با استفاده از تعریف)

**۲۱** با استفاده از نمودار، عبارت خواسته‌شده را (در صورت وجود) محاسبه کنید.




$$۲f(-۱) + \lim_{x \to (-۱)^+} f(x)$$

**۲۲** برای دو تابع $f = \{(۱۱,۷),(-۲,۴),(۳,-۵),(۲,-۵)\}$ و $g = \{(۲,۱۱),(۴,-۲),(۶,۳),(۳,۲)\}$، تابع $fog$ را به‌صورت زوج مرتب بنویسید.

**۱** می‌دانیم باتوجه‌به شکل، $f(x)=\sqrt{-x-۳}+۲$ است:

$$(-۳,۲)\in f \Rightarrow f(-۳)=۲ \Rightarrow \sqrt{-(-۳)+a}-b=۲ \Rightarrow \sqrt{۳+a}-b=۲(*)$$

$$D_f:[-\infty,-۳]:\begin{cases} x\le -۳ \\ -x+a\ge ۰ \Rightarrow x\le a \end{cases} \Rightarrow a=-۳$$

$$\sqrt{۳+(-۳)}-b=۲ \Rightarrow b=-۲$$

همچنین داریم $D_f=R_{f^{-۱}}$ و $R_f=D_{f^{-۱}}$، پس:

$$f(x)=\sqrt{-x-۳}+۲ \;\; ; x\le -۳$$

$$\Rightarrow y=\sqrt{-x-۳}+۲ \Rightarrow x=\sqrt{-y-۳}+۲ \Rightarrow x-۲=\sqrt{-y-۳}$$

$$\Rightarrow (x-۲)^۲=(-y-۳) \Rightarrow (x-۲)^۲+۳=-y$$

$$\Rightarrow y=-(x-۲)^۲-۳ \Rightarrow f^{-۱}(x)=-(x-۲)^۲-۳ \; ; x\ge ۲$$

پاسخ سؤال ۲

**۲**

$$\frac{۲\tan x}{۱+\tan^۲ x}=\frac{\frac{۲\sin x}{\cos x}}{\frac{\cos^۲ x+\sin^۲ x}{\cos^۲ x}}=\frac{۲\sin x\cos^۲ x}{\cos x}=۲\sin x\cos x=\sin ۲x$$

**۳** دو نقطهٔ $(-۲,۰)$ و $(-۶,-۲)$ روی خط $AB$ قرار دارند:

$$m_{AB}=\frac{۰-(-۲)}{-۲-(-۶)}=\frac{۱}{۲}$$

$$y-y_۰=m(x-x_۰) \Rightarrow y-۰=\frac{۱}{۲}(x+۲) \Rightarrow y=\frac{۱}{۲}x+۱$$

حال چون عرض نقطهٔ $C$، ۴ است، پس نقطهٔ $C$ باید در معادلهٔ فوق صدق کند.

$$y=\frac{۱}{۲}x+۱ \Rightarrow ۴=\frac{۱}{۲}a+۱ \Rightarrow a=۶$$

**۴**

$$-۱+\frac{۸}{k}=۱ \Rightarrow \frac{۸}{k}=۲ \Rightarrow k=۴$$

**۵**

$$\cot x - \tan x = -۲ \Rightarrow \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\cos x} = -۲$$
$$\Rightarrow \frac{\cos^۲ x - \sin^۲ x}{\sin x \cos x} = -۲ \Rightarrow \frac{\cos ۲x}{\frac{۱}{۲}\sin ۲x} = -۲$$

$$\Rightarrow \cot ۲x = -۱ \Rightarrow \begin{cases} ۲x = \frac{۳\pi}{۴} \Rightarrow x = \frac{۳\pi}{۸} \\ ۲x = \frac{۷\pi}{۴} \Rightarrow x = \frac{۷\pi}{۸} \end{cases} \text{ غ.ق.ق } (\frac{\pi}{۲} < x < \pi)$$

$$\sin \frac{۷\pi}{۸} - \cos \frac{۷\pi}{۸} = a \xrightarrow{()^۲} \sin^۲ \frac{۷\pi}{۸} + \cos^۲ \frac{۷\pi}{۸} - ۲\sin \frac{۷\pi}{۸} \cos \frac{۷\pi}{۸} = a^۲$$

$$۱ - \sin \frac{۷\pi}{۴} = a^۲ \Rightarrow ۱ + \frac{\sqrt{۲}}{۲} = a^۲ \Rightarrow a = \pm\sqrt{\frac{۲+\sqrt{۲}}{۲}} \Rightarrow a = \sqrt{\frac{۲+\sqrt{۲}}{۲}}$$

دقت کنید چون $\frac{\pi}{۲} < x < \pi$، مقدار $\sin x$ عددی مثبت و $\cos x$ عددی منفی است، پس $\sin x - \cos x$ مثبت است.

نکته:

$$۱) \cos^۲ x - \sin^۲ x = \cos ۲x$$
$$۲) ۲\sin x \cos x = \sin ۲x \Rightarrow \sin x \cos x = \frac{۱}{۲}\sin ۲x$$

**۶**

حدود چپ و راست تابع را در $x = ۰$ به دست می‌آوریم.

$$\text{حد راست} = \lim_{x \to ۰^+} \frac{\sqrt{۱ - \cos ۶x}}{\sqrt{۲}\sin ax} = \lim_{x \to ۰^+} \frac{\sqrt{۲\sin^۲ ۳x}}{\sqrt{۲}\sin ax} = \lim_{x \to ۰^+} \frac{\sqrt{۲}\frac{\sin ۳x}{۳x}/۳x}{\sqrt{۲}\frac{\sin ax}{ax}.ax} = \frac{۳}{a}$$

$$\text{حد چپ} = \lim_{x \to ۰^-} \frac{\sqrt{۴+x} - ۲}{bx} \times \frac{\sqrt{۴+x} + ۲}{\sqrt{۴+x} + ۲} = \lim_{x \to ۰^-} \frac{۴ + x - ۴}{bx(\sqrt{۴+x} + ۲)} = \frac{۱}{۴b}$$

لازم است حد چپ و راست با مقدار تابع برابر باشند، پس:

$$\frac{۳}{a} = ۳ \Rightarrow a = ۱ \quad , \quad \frac{۱}{۴b} = ۳ \Rightarrow b = \frac{۱}{۱۲}$$

پاسخ سؤال ۷

**۷**

۲

**۸**

$$(fog)(x) = f(g(x)) = g^۲(x) + ۴g(x) + ۲ = x^۲ + ۶x + ۷$$
$$\xrightarrow{+۲} (g(x) + ۲)^۲ = (x + ۳)^۲ \Rightarrow g(x) + ۲ = \pm(x + ۳)$$
$$\Rightarrow g(x) = x + ۱ \quad \text{یا} \quad g(x) = -x - ۵$$

**۹**

$$S_n = \frac{n}{۲}(۲a + (n-۱)d) \Rightarrow ۱۲۵ < \frac{n}{۲}(-۲ + ۳(n-۱)) \quad (۰/۲۵)$$
$$\Rightarrow ۳n^۲ - ۵n - ۲۵۰ > ۰ \quad (۰/۲۵) \Rightarrow n = ۱۰ \quad (۰/۲۵) \quad , \quad n = -۸/۳$$

حداقل ۱۱ جمله باید جمع شود. (۰/۲۵)

**۱۰**

$$y = ax + b \Rightarrow ax = y - b \Rightarrow x = \frac{۱}{a}(y - b) \Rightarrow f^{-۱}(x) = \frac{x}{a} - \frac{b}{a}$$

$$f(x) = f^{-۱}(x) \Rightarrow ax + b = \frac{x}{a} - \frac{b}{a} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{۱}{a} \Rightarrow a^{۲} = ۱ \Rightarrow a = \pm ۱ \\ b = -\frac{b}{a} \end{cases}$$

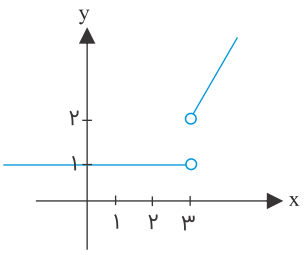
$$\begin{cases} a = ۱ \Rightarrow b = -\frac{b}{۱} \Rightarrow ۲b = ۰ \Rightarrow b = ۰ \Rightarrow f(x) = x \\ a = -۱ \Rightarrow b = \frac{-b}{-۱} \Rightarrow b = b \quad \text{برای هر } b \text{ تساوی برقرار است.} \end{cases}$$

پس در کل توابع خطی که با وارونشان مساوی‌اند، عبارت‌اند از:

۱) $f(x) = x$

۲) $f(x) = -x + b \quad ; b \in \mathbb{R}$

**۱۱**




پاسخ سؤالات ۱۲ تا ۱۴

**۱۲**

$$\lim_{x \to (\frac{\pi}{۴})^-} \frac{\sqrt{۱ - \sin ۲x}}{\tan x - ۱} = \frac{۰}{۰}$$

$$۱ - \sin ۲x = \sin^{۲} x + \cos^{۲} x - ۲ \sin x \cos x = (\sin x - \cos x)^{۲}$$

$$\lim_{x \to (\frac{\pi}{۴})^-} \frac{\sqrt{۱ - \sin ۲x}}{\tan x - ۱} = \lim_{x \to (\frac{\pi}{۴})^-} \frac{\sqrt{(\sin x - \cos x)^{۲}}}{\tan x - ۱} = \lim_{x \to (\frac{\pi}{۴})^-} \frac{|\sin x - \cos x|}{\frac{\sin x}{\cos x} - ۱}$$

$$= \lim_{x \to (\frac{\pi}{۴})^-} \frac{-\cancel{(\sin x - \cos x)}}{\frac{\cancel{(\sin x - \cos x)}}{\cos x}} = \lim_{x \to (\frac{\pi}{۴})^-} (-\cos x) = \frac{-\sqrt{۲}}{۲}$$

دقت کنید وقتی $x$ از سمت مقادیر کمتر به $\frac{\pi}{۴}$ میل می‌کند، $\sin x$ از $\cos x$ کوچک‌تر است:

$$x \to (\frac{\pi}{۴})^{-} \Rightarrow \sin x < \cos x \Rightarrow \sin x - \cos x < ۰$$

**۱۳** در ابتدا مقدار $[x]$ را در $x \to ۰^-$ برابر ۱- می‌گذاریم:

$$\lim_{x\to ۰^-} \frac{\sqrt{۱-\cos ۲x}}{x[x]} = \lim_{x\to ۰^-} \frac{\sqrt{۱-\cos ۲x}}{-x} = \frac{۰}{۰} \text{ مبهم}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to ۰^-} \frac{\sqrt{۲\sin^۲ x}}{-x} = \lim_{x\to ۰^-} \frac{\sqrt{۲}\,|\sin x|}{-x} = \lim_{x\to ۰^-} \frac{-\sqrt{۲}\sin x}{-x} = \sqrt{۲}$$

نکته:

$$۱)\ ۱-\cos ۲x = ۲\sin^۲ x \quad , \quad ۲)\ \lim_{x\to ۰} \frac{\sin x}{x} = ۱$$

**۱۴**

$$\lim_{x\to ۰} \frac{\tan x - \sin x}{x^۳} = \frac{۰}{۰} \text{ مبهم} \Rightarrow \lim_{x\to ۰} \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x}{x^۳}$$
$$= \lim_{x\to ۰} \frac{\sin x(۱-\cos x)}{x^۳\cos x} = \lim_{x\to ۰} \left(\frac{\sin x}{x} \times \frac{۱}{\cos x} \times \frac{۱-\cos x}{x^۲}\right)$$
$$= \lim_{x\to ۰} \left(۱ \times ۱ \times \frac{۱-\cos x}{x^۲}\right) = \lim_{x\to ۰} \frac{۱-\cos x}{x^۲} \times \underbrace{\frac{۱+\cos x}{۱+\cos x}}_{۲}$$
$$= \lim_{x\to ۰} \frac{۱-\cos^۲ x}{۲x^۲} = \lim_{x\to ۰} \frac{\sin^۲ x}{۲x^۲} = \lim_{x\to ۰} \frac{۱}{۲}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^۲ = \frac{۱}{۲}$$

**۱۵** **الف**

$$|۳-۳x| = ۳\,|۱-x| = ۳\,|x-۱| \Rightarrow |x-۱| + |x-۳| = ۳\,|x-۱|$$
$$\Rightarrow ۲\,|x-۱| = |x-۳| \Rightarrow ۲x-۲ = \pm(x-۳) \Rightarrow \begin{cases} ۲x-۲ = x-۳ \Rightarrow x = -۱ \\ ۲x-۲ = -x+۳ \Rightarrow x = \frac{۵}{۳} \end{cases}$$

**ب** نکته: نامساوی $|a+b| \le |a| + |b|$ به نامساوی مثلث معروف است.

در این نامساوی داریم: $\begin{cases} |a+b| = |a| + |b| & , ab \ge ۰ \\ |a+b| < |a| + |b| & , ab < ۰ \end{cases}$، یعنی اگر عبارت $a$ و $b$ هم‌علامت باشند، نامساوی به تساوی تبدیل می‌شود.

$$\underbrace{|x-۱|}_{a} + \underbrace{|x-۲|}_{b} = \underbrace{|۲x-۳|}_{a+b} \Rightarrow ab \ge ۰ \Rightarrow (x-۱)(x-۲) \ge ۰$$

| x | | ۱ | | ۲ | |
|---|---|---|---|---|---|
| P | + | ۰ | − | ۰ | + |

$\Rightarrow x \ge ۲$ یا $x \le ۱$ معادله بی‌شمار جواب دارد

**پ**

$$|x-5|+|4-2x|=|3x-9| \xrightarrow{|4-2x|=|2x-4|} \underbrace{|x-5|}_{a}+\underbrace{|2x-4|}_{b}=\underbrace{|3x-9|}_{a+b}$$

تساوی فوق وقتی برقرار است که $a$ و $b$ هم‌علامت باشند:

$$ab \geq 0 \Rightarrow (x-5)(2x-4) \geq 0$$

| x | | 2 | | 5 | |
|---|---|---|---|---|---|
| P | + | 0 | − | 0 | + |

$$\Rightarrow x \leq 2 \text{ یا } x \geq 5$$

این معادله بی‌شمار جواب دارد.

**۱۶**

$$\log E = 11/8 + 1/5M$$
$$\log E' = 11/8 + 1/5(M + \frac{2}{3}) \Rightarrow \log E' - \log E = 1/5 \times \frac{2}{3} = 1$$
$$\Rightarrow \log \frac{E'}{E} = 1 \Rightarrow \frac{E'}{E} = 10 \Rightarrow E' = 10E$$

انرژی آزادشده ده برابر می‌شود.

**۱۷**

$$x^2 + 7x = \sqrt{2x^2 + 10x + 12} + 2x - 6$$
$$\Rightarrow x^2 + 7x - 2x + 6 = \sqrt{2x^2 + 10x + 12}$$
$$\Rightarrow x^2 + 5x + 6 = \sqrt{2(x^2 + 5x + 6)}$$
$$\xrightarrow{x^2+5x+6=t} t = \sqrt{2t} \Rightarrow t^2 - 2t = 0 \Rightarrow t(t-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 2 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + 5x + 6 = 0 \Rightarrow P = \frac{c}{a} = 6 \\ x^2 + 5x + 6 = 2 \Rightarrow x^2 + 5x + 4 = 0 \Rightarrow P = \frac{c}{a} = 4 \end{cases}$$

پس حاصل‌ضرب ریشه‌های معادله، ۲۴ است.

**۱۸** طبق ویژگی‌های لگاریتم می‌دانیم $a^b = c \Rightarrow \log_a^c = b$.

پس:

$$\log_{۵}^{\frac{x^۴-x^۳+x-۱}{x^۲-x+۱}} = ۳x + ۳ \Rightarrow \frac{x^۴ - x^۳ + x - ۱}{x^۲ - x + ۱} \log_{۵}^{۵} = ۳x + ۳$$

طرفین را به یک طرف منتقل کرده و مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\Rightarrow \frac{x^۳(x-۱) + (x-۱)}{x^۲ - x + ۱} = ۳(x+۱) \Rightarrow \frac{(x-۱)(x^۳+۱)}{x^۲ - x + ۱} - ۳(x+۱) = ۰$$

$$\Rightarrow \frac{(x-۱)(x^۳+۱) - ۳(x+۱)(x^۲ - x + ۱)}{x^۲ - x + ۱} = ۰$$

$$\Rightarrow \frac{(x-۱)(x+۱)(x^۲ - x + ۱) - ۳(x+۱)(x^۲ - x + ۱)}{(x^۲ - x + ۱)} = ۰$$

$$\Rightarrow \frac{(x-۱-۳)(x+۱)(x^۲ - x + ۱)}{(x^۲ - x + ۱)} = ۰$$

$$\xrightarrow{(x^۲-x+۱):\Delta<۰} \frac{(x-۱-۳)(x+۱)\cancel{(x^۲ - x + ۱)}}{\cancel{(x^۲ - x + ۱)}} = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + ۱ = ۰ \Rightarrow x = -۱ & \text{ق ق} \\ (x - ۴) = ۰ \Rightarrow x = ۴ & \text{ق ق} \end{cases}$$

پس معادلهٔ فوق دو جواب دارد و هر دو قابل‌قبول است.

**۱۹**

$$\begin{cases} \frac{۴}{۹}x + \frac{y}{۳} - ۱ = ۰ \xrightarrow{\times ۹} ۴x + ۳y - ۹ = ۰ \\ ۳y = -۴x - ۳ \Rightarrow ۴x + ۳y + ۳ = ۰ \end{cases}$$

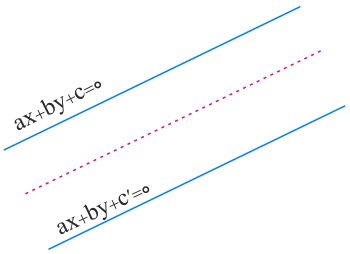
فاصلهٔ دو خط به معادلات $ax + by + c = ۰$ و $ax + by + c' = ۰$ از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}}$$

$$d = \frac{|۳ - (-۹)|}{\sqrt{۲۵}} = \frac{۱۲}{۵} = ۲/۴$$

معادلهٔ خطی موازی و هم‌فاصله با دو خط $ax + by + c = ۰$ و $ax + by + c' = ۰$ برابر است با:

$$ax + by + \frac{c + c'}{۲} = ۰$$




$$۴x + ۳y + \frac{۳ + (-۹)}{۲} = ۰ \Rightarrow ۴x + ۳y - ۳ = ۰$$

الف

$$(g+۲f)(۲)=g(۲)+۲f(۲)=۳+۲(۳)=۹$$

ب

$$D_f: x+۷\geq ۰\Rightarrow x\geq -۷$$
$$D_g: \mathbb{R}$$
$$D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g-\{x|\, g(x)=۰\}$$

$$D_{\frac{f}{g}}=[-۷,+\infty)-\{x^۲-۱=۰\}\Rightarrow D_{\frac{f}{g}}=[-۷,+\infty)-\{-۱,۱\}$$

۲۱

$$۲f(-۱)+\lim_{x\to(-۱)^+}f(x)=۲\times ۳+۱=۷$$

۲۲

$$fog=\{(۲,۷),(۴,۴),(۶,-۵),(۳,-۵)\}$$