



۱ به ازای کدام مقدار برای m ، هر دو جواب معادله $m^2 - 2mx + 2x^2 - m = 0$ ، معکوس یکدیگرند؟
 ۲ ریشه‌های حقیقی معادله زیر را به دست آورید.

$$\sqrt{x^2 - 8x + 12} + \sqrt{x^3 - 3x^2 + 4x - 4} = 0$$

۳ به ازای چه مقدار k ، معادله $\frac{4-t}{2-2t} = \frac{3t^2+k}{(t^2+1)^2-68}$ دارای جواب $t = -3$ است؟

۴ در دوزنقه $ABCD$ با قاعده‌های ۵ و ۳، اندازه پاره‌خطی که وسط قطرها را به هم وصل می‌کند به دست آورید.

۵ یک دایره به مرکز O و به شعاع ۲ سانتی‌متر بکشید و یک نقطه دلخواه روی آن در نظر بگیرید. فاصله این نقطه تا مرکز دایره چقدر است؟

۶ نمودار تابع $f(x) = \frac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^2 - 1}$ را رسم کنید.

۷ نقاط $A(2, 3)$ ، $B(-1, 0)$ و $C(1, -2)$ سه رأس از مستطیل $ABCD$ هستند. مختصات رأس چهارم آن را بیابید.

۸ برای رد حدس‌های کلی زیر مثال نقض ارائه دهید:

الف اگر دو زاویه مکمل یکدیگر باشند، آنگاه هر دو زاویه قائمه هستند.

ب اگر دو مثلث هم مساحت باشند، آنگاه هم‌نهشت هستند.

۹ اگر در یک دایره، اندازه کمان مقابل به زاویه مرکزی $\alpha = \frac{5}{4} \text{ rad}$ برابر ۱۲۵ سانتی‌متر باشد، شعاع دایره چقدر است؟

۱۰ ریشه‌های حقیقی معادله زیر را به دست آورید.

$$\sqrt{x^2 + 5x + 6} + \sqrt{3x^2 - 5x - 42} = 0$$

کمترین و بیشترین مقدار توابع زیر را به دست آورید.

۱۱ $y = -2 \cos x + 3$

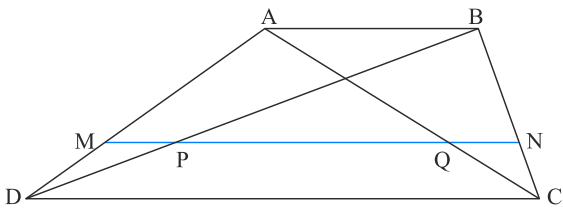
۱۲ $y = -3 \sin x + 4$

۱۳ نقاطی را بر روی خط $y = x - 3$ بیابید که فاصله آن‌ها از خط $y - 4x = 3$ برابر با $\sqrt{17}$ باشد.

۱۴ اگر α یکی از ریشه‌های معادله $x^3 - 7x + 4 = 0$ باشد، حاصل $\alpha^2 - \frac{4}{\alpha}$ را به دست آورید.

۱۵ معادله $\sqrt{4x^2 - 8x - 3} = 2x^2 - 4x - 3$ را حل کنید.

۱۶ در دوزنقه زیر، MN با قاعده‌ها موازی است و $\frac{AM}{MD} = \frac{m}{n}$. ثابت کنید:



$$MN = \frac{m \cdot DC + n \cdot AB}{m + n}$$

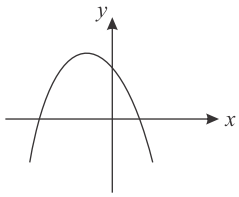
الف

$$PQ = \frac{m \cdot DC - n \cdot AB}{m + n}$$

ب

در شکل زیر سهمی به معادله $p(x) = ax^2 + bx + c$ داده شده است. علامت ضرایب a و b و c و تعداد ریشه‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ را تعیین کنید.

۱۷



اگر $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ و $g(x) = \frac{x}{x-1}$ باشد، دامنه تابع $\frac{f}{g}$ را بیابید.

۱۸



۱

$$2x^2 - 2mx + (m^2 - m) = 0 \Rightarrow x^2 - mx + \left(\frac{m^2 - m}{2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \text{حاصل ضرب ریشه‌ها} = \frac{c}{a} = 1 \Rightarrow \frac{m^2 - m}{2} = 1 \Rightarrow m^2 - m = 2 \Rightarrow m^2 - m - 2 = 0$$

$$\Rightarrow m = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \Rightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -1 \end{cases}$$

حال هر دو جواب را در معادله صورت سوال جایگذاری می‌کنیم:

$$\begin{cases} m = 2: 2x^2 - 4x + 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 0 \text{ غ.ق.ق} \\ m = -1: 2x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x = -1, 0 \text{ غ.ق.ق} \end{cases}$$

بنابراین مقداری برای m یافت نشد.

۲

هرگاه مجموع دو عبارت رادیکالی (نامنفی) برابر صفر شده باشد، هریک از آن دو باید برابر صفر باشند:

$$x^2 - 8x + 12 = 0 \Rightarrow (x - 6)(x - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 6 \end{cases}$$

این دو ریشه می‌بایست در رادیکال دوم بررسی شوند:

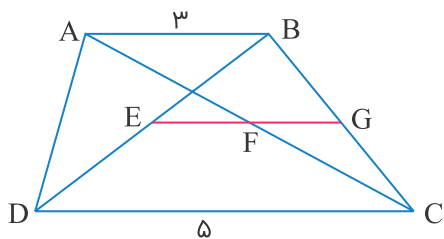
$$x^3 - 3x^2 + 4x - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2: 8 - 12 + 8 - 4 = 0 \\ x = 6: 216 - 108 + 24 - 4 \neq 0 \end{cases}$$

پس $x = 2$ تنها ریشه حقیقی معادله است.

۳

$$\frac{4 - (-3)}{2 - 2(-3)} = \frac{3(-3)^2 + k}{((-3)^2 + 1)^2 - 68}$$

$$\Rightarrow \frac{7}{8} = \frac{27 + k}{100 - 68} \Rightarrow k = 1$$



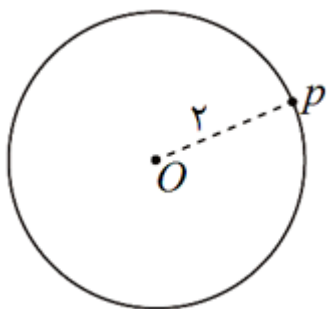
با استفاده از قضیه تالس داریم:

$$\triangle ABC : \frac{FG}{AB} = \frac{CF}{AC} \Rightarrow FG = \frac{3}{2}$$

$$\triangle BDC : \frac{EG}{DC} = \frac{BE}{BD} \Rightarrow EG = \frac{5}{2}$$

$$EF = EG - FG = \frac{5}{2} - \frac{3}{2} = 1$$

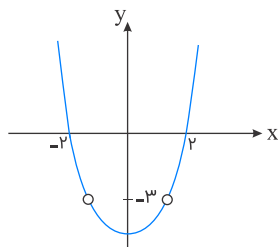
فاصله هر نقطه دلخواه مانند p روی دایره تا مرکز برابر با دو سانتی متر است.



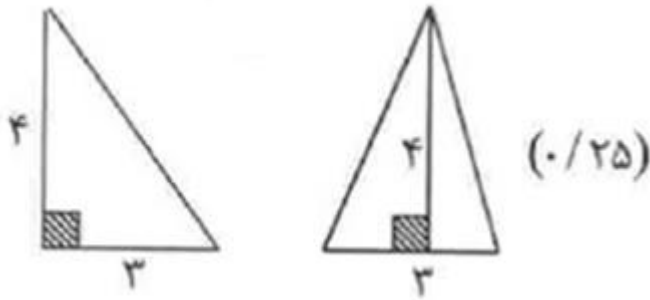
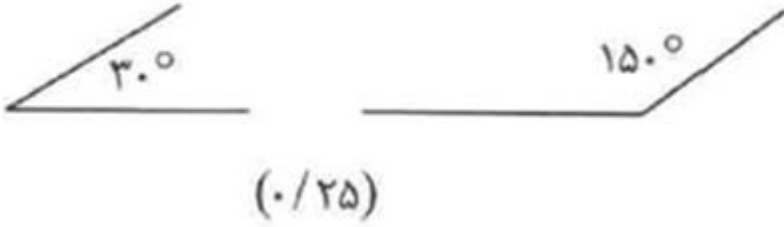
برای رسم نمودار تابع، ابتدا دامنه را به دست می آوریم: $D_f = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$
سپس تابع f را تا آنجا که می توانیم ساده می کنیم:

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(x) &= \frac{x^2 - 5x^2 + 4}{x^2 - 1} = \frac{(x^2 - 4)(x^2 - 1)}{x^2 - 1} \\ &= x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2) \end{aligned}$$

حال تابع درجه ۲، $f(x) = x^2 - 4$ را با دامنه $\mathbb{R} - \{\pm 1\}$ رسم می کنیم:



$$\begin{cases} \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{x_B + x_D}{2} \\ \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{y_B + y_D}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2+1}{2} = \frac{-1+x_D}{2} \\ \frac{-2+3}{2} = \frac{0+y_D}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_D = 4 \\ y_D = 1 \end{cases} \Rightarrow D = (4, 1)$$



$$\alpha = \frac{1}{r} \Rightarrow \frac{5}{2} = \frac{125 \text{ cm}}{r \text{ cm}} \Rightarrow r = \frac{2 \times 125}{5} = \frac{250}{5} = 50 \text{ cm}$$

هرگاه مجموع دو عبارت رادیکالی (نامنفی) برابر صفر شود، هر یک از آن دو باید برابر صفر باشد:
راه حل اول:

$$x^2 + 5x + 6 = 0 \Rightarrow (x + 3)(x + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = -2 \end{cases}$$

این دو ریشه می‌بایست در رادیکال دوم نیز بررسی شود:

$$3x^2 - 5x - 42 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -3 : 27 + 15 - 42 = 0 \\ x = -2 : 12 + 10 - 42 \neq 0 \end{cases}$$

پس $x = -3$ تنها ریشه حقیقی معادله است.
راه حل دوم:

$$x^2 + 5x + 6 = 0 \Rightarrow (x + 3)(x + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = -2 \end{cases}$$

عبارت رادیکال دوم را تجزیه می‌کنیم:

$$3x^2 - 5x - 42 = 0 \Rightarrow (x + 3)(3x - 14) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = \frac{14}{3} \end{cases}$$

ریشه مشترک دو عبارت، $x = -3$ است.

پاسخ سؤالات ۱۱ تا ۱۲

$$y = -2 \cos x + 3$$

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow -2 \leq -2 \cos x \leq 2 \Rightarrow 1 \leq -2 \cos x + 3 \leq 5 \Rightarrow 1 \leq y \leq 5$$

$$y = -3 \sin x + 4$$

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow -3 \leq -3 \sin x \leq 3 \Rightarrow 1 \leq -3 \sin x + 4 \leq 7 \Rightarrow 1 \leq y \leq 7$$

نقاط روی خط $y = x - 3$ را به صورت پارامتری می‌نویسیم و سپس فاصله این نقاط را از خط $y - 4x = 3$ برابر $\sqrt{17}$ قرار می‌دهیم:

$$\frac{|-4(\alpha) + 1(\alpha - 3) - 3|}{\sqrt{1 + 16}} = \sqrt{17} \Rightarrow |-4(\alpha) + 1(\alpha - 3) - 3| = 17 \Rightarrow |-3\alpha - 6| = 17$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3\alpha - 6 = 17 \Rightarrow \alpha = -\frac{23}{3} \\ -3\alpha - 6 = -17 \Rightarrow \alpha = \frac{11}{3} \end{cases}$$

پس دو نقطه به مختصات $A(\frac{11}{3}, \frac{2}{3})$ و $B(-\frac{23}{3}, -\frac{32}{3})$ به فاصله $\sqrt{17}$ از خط $y - 4x = 3$ قرار دارند.

چون α یکی از ریشه‌های معادله داده شده است، پس در معادله صدق می‌کند.

$$\alpha^3 - 7\alpha + 4 = 0 \Rightarrow \alpha^3 - 7\alpha = -4$$

$$-\frac{4}{\alpha} - \alpha^2 = \frac{\alpha^3 - 7\alpha}{\alpha} - \alpha^2 = \alpha^2 - 7 - \alpha^2 = -7$$

$$2x^2 - 4x = t + 3$$

معادله اولیه را کمی ساده‌تر می‌نویسیم:

$$\sqrt{2x^2 - 4x - 3} = 2x^2 - 4x - 3 \Rightarrow \sqrt{2(2x^2 - 4x) - 3} = 2x^2 - 4x - 3$$

حال به جای $2x^2 - 4x$ عبارت $t + 3$ را قرار می‌دهیم:

$$\sqrt{2(t + 3) - 3} = t \Rightarrow \sqrt{2t + 3} = t$$

$$\xrightarrow{\text{توان } 2} t^2 - 2t - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = -1 \times \\ t = 3 \checkmark \end{cases}$$

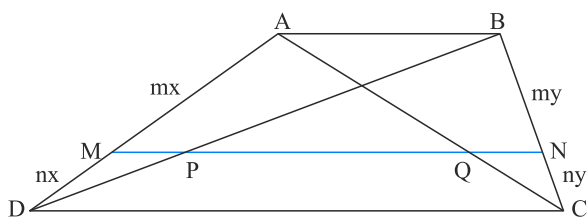
دقت کنید $t = -1$ در معادله صدق نمی‌کند.

حال عبارتی که t گرفته بودیم را برابر با ۳ قرار می‌دهیم:

$$2x^2 - 4x - 3 = 3 \Rightarrow 2x^2 - 4x - 6 = 0$$

$$\xrightarrow{\times \frac{1}{2}} x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$$

فرض کنیم $AM = mx$ و $MD = nx$ ، حال داریم:

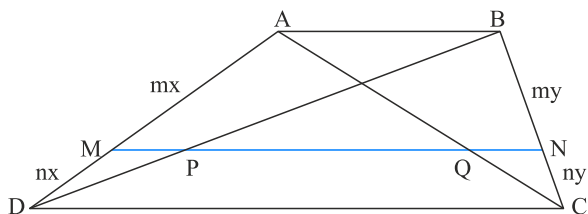


$$MN \parallel AB \parallel DC \Rightarrow \frac{BN}{NC} = \frac{AM}{MD} = \frac{m}{n} \Rightarrow BN = my, NC = ny$$

$$\triangle ADC : MQ \parallel DC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{MQ}{DC} = \frac{AM}{AD} = \frac{m}{m+n} \Rightarrow MQ = \frac{m \cdot DC}{m+n} (*)$$

$$\triangle CBA : QN \parallel AB \Rightarrow \frac{QN}{AB} = \frac{CN}{CB} = \frac{n}{m+n} \Rightarrow QN = \frac{n \cdot AB}{m+n} (**)$$

$$MN = MQ + QN \xrightarrow{(*), (**)} MN = \frac{m \cdot DC + n \cdot AB}{m+n}$$



حال داریم:

$$\triangle ADC : MQ \parallel DC \Rightarrow \frac{MQ}{DC} = \frac{AM}{AD} = \frac{m}{m+n} \Rightarrow MQ = \frac{m \cdot DC}{m+n} (*)$$

$$\triangle DAB : MP \parallel AB \Rightarrow \frac{MP}{AB} = \frac{DM}{DA} = \frac{n}{m+n} \Rightarrow MP = \frac{n \cdot AB}{m+n} (**)$$

$$PQ = MQ - MP \xrightarrow{(*), (**)} PQ = \frac{m \cdot DC - n \cdot AB}{m+n}$$

$$سهمی رو به پایین $\Rightarrow a < 0$$$

$$-\frac{b}{a} < 0 \Rightarrow -b > 0 \Rightarrow b < 0$$

$$\frac{c}{a} < 0 \Rightarrow c > 0$$

تعداد ریشه‌ها برابر ۲ است.

برای تعیین دامنه تابع $\frac{f}{g}$ باید ابتدا دامنه توابع f و g را بیابیم:

$$D_f : 9 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 9 \Rightarrow -3 \leq x \leq 3$$

$$D_g : x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow D_g = \mathbb{R} - \{1\}$$

برای تعیین دامنه تابع $\frac{f}{g}$ از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x | g(x) = 0\} = \{-3 \leq x \leq 3\} \cap \{\mathbb{R} - \{1\}\} - \{x | \frac{x}{x-1} = 0\}$$

$$\Rightarrow D_{\frac{f}{g}} = [-3, 3] - \{0, 1\}$$