۱ اگر $f(x)=\sqrt{x-۳}$ و $g=\{(۰,۴),(۳,۲),(۵,۶)\}$ دو تابع باشند:

الف دامنهٔ تابع $\frac{f}{g}$ را بنویسید.

۲ از نقطهٔ A روی نیمساز زاویهٔ $x\hat{O}y=۱۲۰^\circ$ خطی عبور می‌دهیم تا اضلاع زاویه را در نقاط B و C قطع کند. ثابت کنید:
$$\frac{۱}{OA}=\frac{۱}{OB}+\frac{۱}{OC}$$

۳ دو خط متقاطع L و L' در صفحه، مفروض‌اند. نقاطی از صفحه را بیابید که از این دو خط، به یک فاصله‌اند.

۴ با استفاده از استدلال استنتاجی ثابت کنید، اگر به سه برابر عددی فرد یک واحد اضافه شود، عددی زوج به دست می آید.

۵ دو نقطهٔ $A(۲\ ,\ ۴)$ و $B(۱\ ,\ ۰)$ نسبت به خط Δ قرینهٔ یکدیگرند. معادلهٔ خط Δ را به دست آورید.

۶ نمودار توابع زیر را در بازه‌های داده‌شده رسم کنید.

الف
$$f(x)=[۲x+۱]\quad,\quad[-۱,۱)$$

ب
$$f(x)=|x|-[x]\quad,\quad[-۲,۲]$$

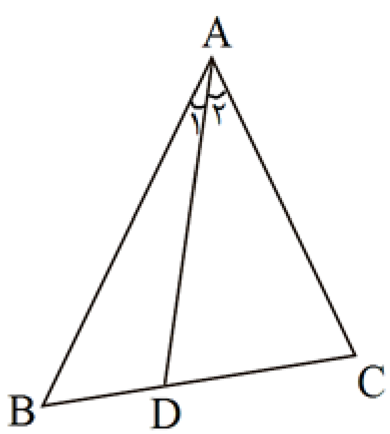
۷ اگر α یکی از ریشه‌های معادلهٔ $x^۳-۷x+۴=۰$ باشد، حاصل $-\alpha^۲-\frac{۴}{\alpha}$ را به دست آورید.

درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

۸ $\sin(-۱۰^\circ)=-\sin ۱۰^\circ$ درست ☐ نادرست ☐

۹ $-\cos(۳۰^\circ)=\cos(-۳۰^\circ)$ درست ☐ نادرست ☐

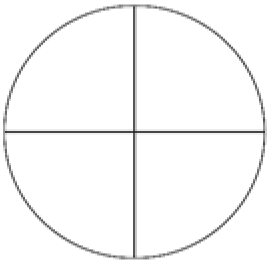
۱۰ فرض کنید AD نیمساز زاویهٔ A از مثلث ABC باشد. ثابت کنید اگر $BD=DC$ باشد، آنگاه $AB=AC$.



زاویه‌های زیر را بر روی دایرهٔ مثلثاتی نمایش دهید.

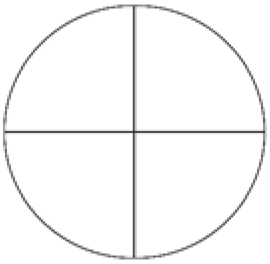
۱۱

۴۰۵°



۱۲

-۳۹۰°



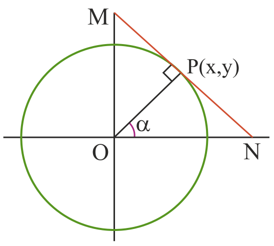
۱۳ خط $۲y - ۳x = ۶$ از کدام نواحی دستگاه مختصات عبور می‌کند؟

۱۴ ریشه‌های معادلهٔ زیر را به دست آورید.

$$\sqrt{x^۲ - ۲x - ۳} + \sqrt{x^۴ - ۳x^۳ - x^۲ + ۹} = ۰$$

۱۵ خط MN در نقطهٔ $P\left(x, y\right)$ بر دایرهٔ مثلثاتی شکل زیر مماس شده است. نشان دهید:

$$PN + PM = ON.OM$$



۱۶ از نقطهٔ O درون مثلث ABC به مساحت S، سه خط به موازات اضلاع مثلث رسم کرده و مساحت مثلث‌های ایجاد شده را $S_۱$ ، $S_۲$ و $S_۳$ می‌نامیم. ثابت کنید: $S = \left(\sqrt{S_۱} + \sqrt{S_۲} + \sqrt{S_۳}\right)^۲$

۱۷ محیط‌های دو مثلث متشابه، ۲۵ و ۴۵ واحد است. اگر مساحت مثلث کوچک‌تر ۵۰ واحد مربع باشد، مساحت مثلث بزرگ‌تر را بیابید.

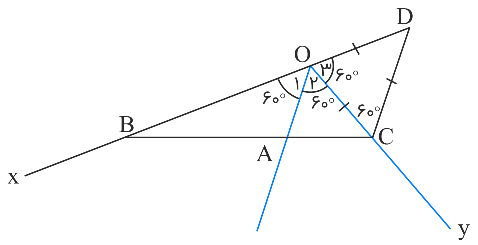
۱۸ امتداد ساق‌های ذوزنقهٔ $ABCD$ $(AB \parallel CD)$ در نقطهٔ M متقاطع‌اند. از M خطی به موازات قاعده‌های ذوزنقه رسم می‌کنیم تا امتداد قطرهای ذوزنقه را به ترتیب در نقاط P و Q قطع کند. ثابت کنید $MP = MQ$.

۱۹ منحنی درجهٔ دوم $y = ۲x^۲ + ۳x - k$ دارای دو ریشهٔ حقیقی متمایز و منفی است. محدودهٔ k را تعریف کنید.

۱ الف

$$D_{\frac{f}{g}} = \{۳, ۵\}$$

۲ از C خطی به موازات AO رسم می‌کنیم تا امتداد Ox را در نقطهٔ D قطع کند:



حال داریم:

$$OA \parallel DC \Rightarrow \widehat{C} = \widehat{O}_۲ = ۶۰^\circ \xrightarrow{\widehat{O}_۳ = ۶۰^\circ} \widehat{D} = ۶۰^\circ$$

پس مثلث OCD متساوی‌الاضلاع است و $OC = CD = OD$. حال داریم:

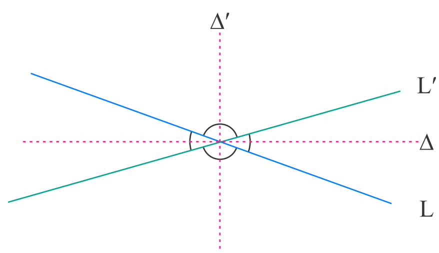
$$\overset{\Delta}{BCD} : AO \parallel CD \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{OA}{DC} = \frac{OB}{BD} \; (*)$$

$$\xrightarrow{(*)} \frac{OA}{OB} = \frac{DC}{BD} \xrightarrow{OD=DC} \frac{OA}{OB} = \frac{OD}{BD} \; (**)$$

$$\xrightarrow{(*),(**)} \frac{OA}{OC} + \frac{OA}{OB} = \frac{OB}{BD} + \frac{OD}{BD} = \frac{BD}{BD} = ۱$$

$$\xrightarrow{\times \frac{۱}{OA}} \frac{۱}{OC} + \frac{۱}{OB} = \frac{۱}{OA}$$

۳ اگر نقطهٔ A از L و L' به یک فاصله باشد، روی نیمساز یکی از زاویه‌های بین L و L' قرار دارد و برعکس. پس نقاط موردنظر، کلیهٔ نقاط واقع بر دو خط عمود بر هم Δ و Δ' هستند که نیمسازهای زاویه‌های بین L و L' می‌باشند.



۴

$\mathrm{k} \in \mathbb{Z}$, عددی فرد : $۲\mathrm{k}+۱$

$\Rightarrow ۳(۲\mathrm{k}+۱)+۱=۶\mathrm{k}+۴=۲(۳\mathrm{k}+۲)=۲\mathrm{k}'$ عددی زوج است

۵

برای اینکه دو نقطه نسبت به یک خط قرینه باشند، باید خط واصل این دو نقطه، بر خط Δ عمود باشد و فاصلهٔ نقاط از خط مذکور برابر باشد.

$$\begin{cases} A(۲\,,\,۴) \\ B(۱\,,\,۰) \end{cases} \Rightarrow m_{AB}=۴ \Rightarrow m_{\text{عمود}}=-\frac{۱}{۴}$$

حال وسط پاره‌خط واصل AB را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} A(۲,۴) \\ B(۱,۰) \end{cases} \Rightarrow M_{\text{نقطهٔ وسط}}\left(\frac{۲+۱}{۲},\frac{۴+۰}{۲}\right)=\left(\frac{۳}{۲}\,,\,۲\right)$$

معادلهٔ خط Δ عبارت است از:

$$y-۲=-\frac{۱}{۴}\left(x-\frac{۳}{۲}\right) \Rightarrow y=-\frac{۱}{۴}x+\frac{۱۹}{۸} \Rightarrow ۸y+۲x=۱۹$$

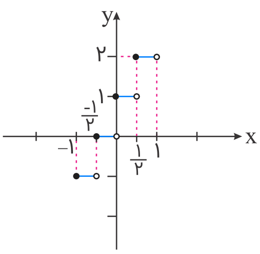
۶ **الف**

اگر $n \in \mathbb{Z}$ آنگاه $[x \pm n]=[x] \pm n$؛ پس:

$$f(x)=[۲x]+۱$$

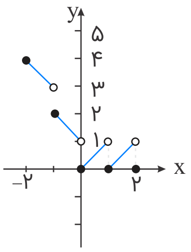
$$-۱ \le x < ۱ \xrightarrow{\times ۲} -۲ \le ۲x < ۲ \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -۲ \le ۲x < -۱ \Rightarrow -۱ \le x < -\frac{۱}{۲} & ,f(x)=-۲+۱=-۱ \\ -۱ \le ۲x < ۰ \Rightarrow -\frac{۱}{۲} \le x < ۰ & ,f(x)=-۱+۱=۰ \\ ۰ \le ۲x < ۱ \Rightarrow ۰ \le x < \frac{۱}{۲} & ,f(x)=۰+۱=۱ \\ ۱ \le ۲x < ۲ \Rightarrow \frac{۱}{۲} \le x < ۱ & ,f(x)=۱+۱=۲ \end{cases}$$



ب

$$f\left(x\right)=|x|-[x]\quad ,[-۲,۲]$$
$$-۲\leq x<-۱\Rightarrow f\left(x\right)=-x-\left(-۲\right)\Rightarrow f\left(x\right)=-x+۲$$
$$-۱\leq x<۰\Rightarrow f\left(x\right)=-x-\left(-۱\right)\Rightarrow f\left(x\right)=-x+۱$$
$$۰\leq x<۱\Rightarrow f\left(x\right)=x-۰\Rightarrow f\left(x\right)=x$$
$$۰\leq x<۲\Rightarrow f\left(x\right)=x-۱$$
$$x=۲\Rightarrow f\left(x\right)=۰$$



۷

چون α یکی از ریشه‌های معادلهٔ داده‌شده است، پس در معادله صدق می‌کند.

$$\alpha^{۳}-۷\alpha+۴=۰\Rightarrow \alpha^{۳}-۷\alpha=-۴$$

$$-\frac{۴}{\alpha}-\alpha^{۲}=\frac{\alpha^{۳}-۷\alpha}{\alpha}-\alpha^{۲}=\alpha^{۲}-۷-\alpha^{۲}=-۷$$

پاسخ سؤالات ۸ تا ۹

۸

درست است.

۹

نادرست است.

۱۰

با استفاده از برهان خلف فرض می‌کنیم حکم نادرست باشد، بنابراین داریم $AB=AC$ (فرض خلف) در این صورت خواهیم داشت:

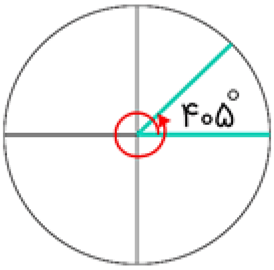
$$\begin{cases}AB=AC\\ AD=AD\\ \hat{A}_{۱}=\hat{A}_{۲}\end{cases}\Rightarrow \overset{\Delta}{ABD}\cong\overset{\Delta}{ACD}$$

از این همنهشتی نتیجه خواهد شد $BD=DC$ است که با فرض مسئله در تناقض است. لذا از ابتدا فرض $AB=AC$ نادرست بوده است، بنابراین $AB=AC$ است.

پاسخ سؤالات ۱۱ تا ۱۲

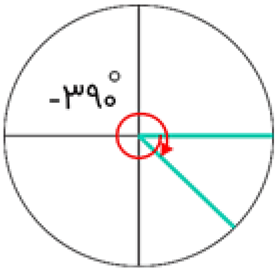
۱۱

$$۴۰۵^{\circ}=\left(۳۶۰^{\circ}+۴۵^{\circ}\right)$$



۱۲

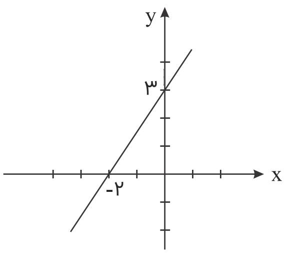
$-۳۹۰^\circ = (-۳۶۰^\circ - ۳۰^\circ)$



۱۳ ابتدا مختصات دو نقطه از این خط را مشخص و سپس آن را رسم می‌کنیم.

$۲y - ۳x = ۶$

x	۰	-۲
y	۳	۰



خط $۲y - ۳x = ۶$ از ناحیهٔ اول و دوم و سوم عبور می‌کند.

۱۴ حاصل‌جمع دو رادیکال فرجهٔ ۲، صفر است، بنابراین هر دوی آن‌ها صفر هستند.

$$\sqrt{x^۲ - ۲x - ۳} = ۰ \Rightarrow x^۲ - ۲x - ۳ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = -۱ \\ x = +۳ \end{cases}$$

حال بررسی می‌کنیم که کدام‌یک در معادلهٔ دوم صدق می‌کند:

$$\begin{cases} x = ۳ \Rightarrow x^۴ - ۳x^۳ - x^۲ + ۹ = ۰ \Rightarrow ۳^۴ - ۳(۳)^۳ - ۳^۲ + ۹ = ۰ \quad \checkmark \\ x = -۱ \Rightarrow x^۴ - ۳x^۳ - x^۲ + ۹ = ۰ \Rightarrow (-۱)^۴ - ۳(-۱)^۳ - (-۱)^۲ + ۹ = ۱۲ \neq ۰ \end{cases}$$

پس این معادله فقط یک جواب دارد. $(x = ۳)$

۱۵

$$\overset{\Delta}{OPN}\ : \tan\alpha = \frac{PN}{OP} = \frac{PN}{۱} \Rightarrow PN = \tan\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{OP}{ON} = \frac{۱}{ON} \Rightarrow ON = \frac{۱}{\cos\alpha}$$

$$\overset{\Delta}{OPM}\ : \tan(\frac{\pi}{۲} - \alpha) = \frac{MP}{OP} = \frac{MP}{۱} \Rightarrow MP = \cot\alpha$$

$$\cos(\frac{\pi}{۲} - \alpha) = \frac{OP}{OM} = \frac{۱}{OM} \Rightarrow OM = \frac{۱}{\sin\alpha}$$

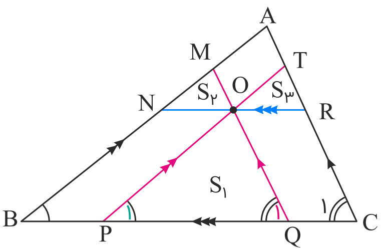
به‌راحتی می‌توان نشان داد که:

$$\tan\alpha + \cot\alpha = \frac{۱}{\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin^{۲}\alpha + \cos^{۲}\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{۱}{\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$\Rightarrow PN + PM = ON.OM$$

۱۶



$$\left.\begin{array}{l} PO \parallel BA \Rightarrow \hat{P}_۱ = \hat{B} \\ QO \parallel CA \Rightarrow \hat{Q}_۱ = \hat{C} \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{OPQ} \sim \overset{\Delta}{ABC}$$

$$\Rightarrow \frac{S_۱}{S} = \left(\frac{PQ}{BC}\right)^{۲} \Rightarrow \frac{\sqrt{S_۱}}{\sqrt{S}} = \frac{PQ}{BC} \quad (I)$$

به روش مشابه $\Rightarrow \overset{\Delta}{MNO} \sim \overset{\Delta}{ABC}$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{S_۲}}{\sqrt{S}} = \frac{ON}{BC} \xrightarrow{\text{متوازی‌الاضلاع است } OPBN} \frac{\sqrt{S_۲}}{\sqrt{S}} = \frac{PB}{BC} \quad (II)$$

به روش مشابه $\Rightarrow \dfrac{\sqrt{S_۳}}{\sqrt{S}} = \dfrac{QC}{BC} \quad (III)$

$$\xrightarrow{(I),(II),(III)} \frac{\sqrt{S_۱}}{\sqrt{S}} + \frac{\sqrt{S_۲}}{\sqrt{S}} + \frac{\sqrt{S_۳}}{\sqrt{S}} = \frac{\overbrace{PQ + PB + QC}^{BC}}{BC} = ۱$$

$$\Rightarrow \sqrt{S_۱} + \sqrt{S_۲} + \sqrt{S_۳} = \sqrt{S} \Rightarrow \left(\sqrt{S_۱} + \sqrt{S_۲} + \sqrt{S_۳}\right)^{۲} = S$$

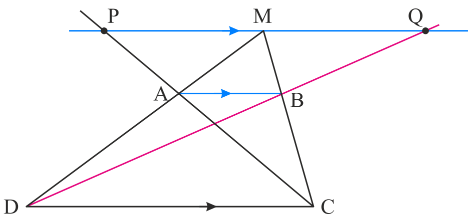
۱۷ می‌دانیم نسبت محیط‌های دو مثلث متشابه، برابر با نسبت تشابه آن‌ها است و نسبت مساحت‌های آن‌ها، مجذور نسبت تشابه آن‌ها است. حال طبق فرض، داریم:

$$\text{نسبت تشابه} = \text{نسبت محیط‌ها} = \frac{۲۵}{۴۵} = \frac{۵}{۹}$$

$$\text{نسبت مساحت‌ها} = \left(\frac{۵}{۹}\right)^{۲} = \frac{۲۵}{۸۱}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\text{مثلث کوچک}}}{S_{\text{مثلث بزرگ}}} = \frac{۲۵}{۸۱} \Rightarrow \frac{۵۰}{S_{\text{مثلث بزرگ}}} = \frac{۲۵}{۸۱} \Rightarrow S_{\text{مثلث بزرگ}} = \frac{۵۰ \times ۸۱}{۲۵} = ۱۶۲$$

۱۸



$$\left.\begin{array}{l} \overset{\Delta}{CMP} : BA \parallel MP \xrightarrow{\text{تالس}} \dfrac{BA}{MP} = \dfrac{CB}{CM} \\ \overset{\Delta}{DMQ} : AB \parallel MQ \xrightarrow{\text{تالس}} \dfrac{AB}{MQ} = \dfrac{DA}{DM} \\ \overset{\Delta}{MCD} : AB \parallel DC \xrightarrow{\text{تالس}} \dfrac{CB}{CM} = \dfrac{DA}{DM} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{BA}{MP} = \frac{AB}{MQ} \Rightarrow MP = MQ$$

۱۹

$$\Delta > ۰ \Rightarrow ۹ + ۸k > ۰ \Rightarrow ۸k > -۹ \Rightarrow k > -\frac{۹}{۸} \quad (۱)$$

$$\frac{c}{a} > ۰ \Rightarrow \frac{-k}{۲} > ۰ \Rightarrow k < ۰ \quad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} -\frac{۹}{۸} < k < ۰$$