مدرسه آموزشگاه ندای دانش | پایه یازدهم تجربی | درس ریاضی

مبحث امتحان نوبت اول

نام و نام‌خانوادگی

۱ معادلهٔ $\sqrt{۲x - ۴} = \sqrt{x^۲ - x - ۲} + \sqrt{x^۲ - ۴}$ چند جواب دارد؟

۲ اگر $f(x) = \sqrt{۹ - x^۲}$ و $g(x) = \dfrac{x}{x - ۱}$ باشد، دامنهٔ تابع $\dfrac{f}{g}$ را بیابید.

اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^۲ - ۴x - ۱ = ۰$ باشند، حاصل عبارات زیر را حساب کنید.

۳

$$(\alpha + ۲)^{-۲} + (۲ + \beta)^{-۲}$$

۴

$$(\alpha - ۴)^۴ + (\beta - ۴)^۴$$

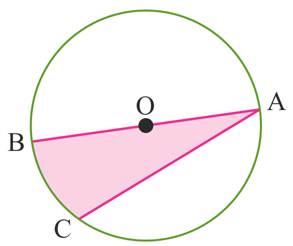
۵ اعداد زیر را به ترتیب از کوچک به بزرگ بنویسید (کمان ۱ برحسب رادیان است).

$$\tan ۱,\ \cot ۱,\ \tan ۱^{\tan ۱},\ \cot ۱^{\cot ۱},\ \tan ۱^{\cot ۱},\ \cot ۱^{\tan ۱}$$

۶ وسطهای اضلاع یک مربع به ضلع a را متوالیاً به هم وصل می‌کنیم تا یک مربع جدید ایجاد شود. طول ضلع مربع جدید را بیابید.

۷ ثابت کنید تابع $f(x) = \dfrac{x - ۱}{x}$ یک‌به‌یک است.

۸ در شکل زیر، O مرکز دایره‌ای به شعاع ۶ است. اگر کمان BC، ۶۰° باشد، مساحت قسمت رنگی را بیابید.



۹ حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$A = \tan(-\frac{\pi}{۶}).\sin(-\frac{\pi}{۳}) - \cot(-\frac{\pi}{۶})$$

۱۰ ثابت کنید اگر $\dfrac{A}{a} = \dfrac{B}{b} = \dfrac{C}{c} = \dfrac{D}{d}$، آنگاه: $\sqrt{Aa} + \sqrt{Bb} + \sqrt{Cc} + \sqrt{Dd} = \sqrt{(A + B + C + D)(a + b + c + d)}$ (همهٔ مقادیر، مثبت‌اند)

زوایایی که مقدار تانژانت آن‌ها منفی است را مشخص کنید. (با ذکر دلیل)

۱۱

$$\frac{۳\pi}{۴}$$

۱۲

۴۴۰°

۱۳

$-\frac{۲\pi}{۳}$

۱۴

۴۰۰°

۱۵

$\frac{۷\pi}{۱۲}$

۱۶

$\frac{۵\pi}{۳}$

۱۷

$-\frac{۳\pi}{۵}$

۱۸ دو تابع $f(x) = \sqrt{x+۳}$ و $g(x) = ۴ - x$ مفروضند:

الف مقدار $\frac{۳g(۰) - f(۶)}{۳}$ را محاسبه کنید.

۱۹ جواب معادلهٔ زیر را به دست آورید.

$$\frac{x^۲}{x^۲-۱} - \frac{x-۱}{x+۱} = ۲x - ۱$$

۲۰ به کمک رسم نمودار، ثابت کنید تابع زیر وارون‌پذیر نیست.

$$f(x) = \begin{cases} x^۲ & ;x \geq ۰ \\ -x-۱ & ;x < ۰ \end{cases}$$

۲۱ تابع f با مشخصات زیر مفروض است:

الف) $f(-۵) = -۲$،$f(۳) = ۳$

ب) $D_f = \mathbb{R}$

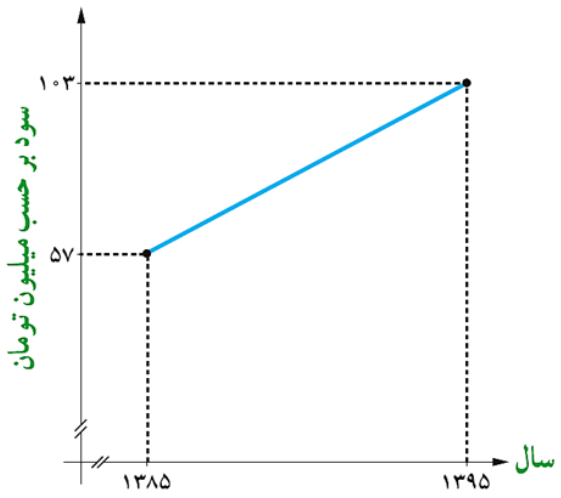
ج) در بازهٔ $[۰, ۳]$ ثابت است.

د) تابع f به هر عدد بزرگ‌تر از ۳ مربع آن را نسبت می‌دهد.

هـ) روی اعداد منفی، تابع، خطی است و نمودار آن محور xها را در نقطه‌ای به طول ۴− قطع می‌کند.

الف شکل تابع را رسم کنید و برد آن را تعیین نمایید.

۲۲ سود سالانهٔ یک کارگاه کوچک تولیدی از سال ۱۳۸۵ تا ۱۳۹۵ طبق نمودار زیر سیر صعودی داشته است.:



الف میانگین سود سالانهٔ این شرکت در دههٔ مورد نظر چقدر بوده است؟

ب در کدام سال، مقدار سود سالانه، با میانگین سود ده ساله برابر بوده است؟

پ اگر سود سالانه در طول یک دههٔ آینده با همین روند افزایش یابد، انتظار می‌رود در سال ۱۴۰۵ سود سالانه شرکت چقدر باشد؟

۲۳ اگر $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$، ثابت کنید: $\frac{ab+cd+ef}{b^{2}+d^{2}+f^{2}}=\frac{a^{2}+c^{2}+e^{2}}{ab+cd+ef}$

۱

$$\sqrt{x^۲-۴}+\sqrt{x^۲-x-۲}=\sqrt{۲x-۴}$$
$$\Rightarrow \sqrt{(x-۲)(x+۲)}+\sqrt{(x-۲)(x+۱)}=\sqrt{۲(x-۲)}$$
$$\Rightarrow \sqrt{(x-۲)}(\sqrt{x+۲}+\sqrt{x+۱})=\sqrt{(x-۲)}.\sqrt{۲}$$
$$\xrightarrow{\text{یک ریشه x=۲ است}} (\sqrt{x+۲}+\sqrt{x+۱})=\sqrt{۲}$$
$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} x+۲+۲\sqrt{x^۲+۳x+۲}+x+۱=۲$$
$$۲x+۱=-۲\sqrt{x^۲+۳x+۲}\xrightarrow{\text{به توان ۲}}\cancel{۴x^۲}+۴x+۱=\cancel{۴x^۲}+۱۲x+۸$$
$$\Rightarrow -۷=۸x\Rightarrow x=-\frac{۷}{۸}\ (*)$$

(*) این مقدار عبارت زیر رادیکال را منفی کند، پس این معادله فقط یک جواب $(x=۲)$ دارد.

۲

برای تعیین دامنهٔ تابع $\frac{f}{g}$ باید ابتدا دامنهٔ توابع f و g را بیابیم:

$$D_f: ۹-x^۲\geq ۰\Rightarrow x^۲\leq ۹\Rightarrow -۳\leq x\leq ۳$$
$$D_g: x-۱=۰\Rightarrow x=۱\Rightarrow D_g=\mathbb{R}-\{۱\}$$

برای تعیین دامنهٔ تابع $\frac{f}{g}$ از رابطهٔ زیر استفاده می‌کنیم:

$$D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g-\{x|\,g(x)=۰\}=\{-۳\leq x\leq ۳\}\cap\{\mathbb{R}-\{۱\}\}-\{x|\,\frac{x}{x-۱}=۰\}$$
$$\Rightarrow D_{\frac{f}{g}}=[-۳,۳]-\{۰,۱\}$$

پاسخ سؤالات ۳ تا ۴

۳

$$S=-\frac{b}{a}\Rightarrow \alpha+\beta=۴\ ,\ P=\frac{c}{a}\Rightarrow \alpha.\beta=-۱$$
$$(\alpha+۲)^{-۲}+(\beta+۲)^{-۲}=\frac{۱}{(\alpha+۲)^۲}+\frac{۱}{(\beta+۲)^۲}=\frac{(\alpha+۲)^۲+(\beta+۲)^۲}{((\alpha+۲)(\beta+۲))^۲}=\frac{\alpha^۲+\beta^۲+۴(\alpha+\beta)+۸}{(\alpha\beta+۲(\alpha+\beta)+۴)^۲}$$
$$=\frac{\alpha^۲+\beta^۲+۴(۴)+۸}{(-۱+۲(۴)+۴)^۲}=\frac{(\alpha+\beta)^۲-۲\alpha\beta+۲۴}{۱۲۱}=\frac{۴^۲-۲(-۱)+۲۴}{۱۲۱}=\frac{۴۲}{۱۲۱}$$

۴ تذکر:

$$۱)\ \alpha^{۲}+\beta^{۲}=(\alpha+\beta)^{۲}-۲\alpha\beta=S^{۲}-۲P$$
$$۲)\ \alpha^{۳}+\beta^{۳}=(\alpha+\beta)^{۳}-۳\alpha\beta(\alpha+\beta)=S^{۳}-۳PS$$

در اینجا به توان رساندن و محاسبه برحسب S و P بسیار طولانی می‌شود:

$$(\alpha-۴)^{۴}+(\beta-۴)^{۴}$$
$$x^{۲}-۴x-۱=۰\Rightarrow x(x-۴)=۱\Rightarrow x-۴=\frac{۱}{x}\Rightarrow \alpha-۴=\frac{۱}{\alpha},\beta-۴=\frac{۱}{\beta}$$
$$\Rightarrow(\alpha-۴)^{۴}+(\beta-۴)^{۴}=\frac{۱}{\alpha^{۴}}+\frac{۱}{\beta^{۴}}=\frac{\alpha^{۴}+\beta^{۴}}{\alpha^{۴}\beta^{۴}}=\frac{(\alpha^{۲}+\beta^{۲})^{۲}-۲\alpha^{۲}\beta^{۲}}{\alpha^{۴}\beta^{۴}}=\frac{(S^{۲}-۲P)^{۲}-۲P^{۲}}{P^{۴}}$$
$$=\frac{(۴^{۲}-۲(-۱))^{۲}-۲(-۱)^{۲}}{(-۱)^{۴}}=\frac{۳۲۴-۲}{۱}=۳۲۲$$

۵

$$\tan ۱,\ \cot ۱,\ \tan ۱^{\tan ۱},\ \cot ۱^{\cot ۱},\ \tan ۱^{\cot ۱},\ \cot ۱^{\tan ۱}$$

می‌دانیم کمان ۱ رادیان حدود ۵۷ درجه است، پس داریم:

$$۱\text{rad}>\frac{\pi}{۴}\Rightarrow \begin{matrix}\tan ۱>۱\\ \cot ۱<۱\end{matrix}$$

درنتیجه اعداد $\tan ۱^{\tan ۱}$ و $\tan ۱^{\cot ۱}$ بزرگ‌تر از یک هستند و اعداد $\cot ۱^{\cot ۱}$ و $\cot ۱^{\tan ۱}$ کوچک‌تر از یک هستند.

$$\tan^{\tan ۱}>\tan ۱>\tan ۱^{\cot ۱}>\cot ۱^{\cot ۱}>\cot ۱>\cot ۱^{\tan ۱}$$

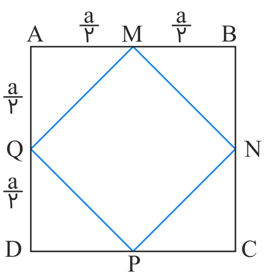
برای درک بهتر، ترتیب بالا را با معادل‌های عددی زیر نمایش می‌دهیم (مقدار $\tan ۱>۱$ را با ۱^{+} و همین‌طور اعداد کوچک‌تر از یک را با ۱^{-} نشان می‌دهیم).

$$(۱^{+})^{(۱^{+})}>۱^{+(۱)}>(۱^{+})^{(۱^{-})}>(۱^{-})^{(۱^{-})}>۱^{-}>(۱^{-})^{(۱^{+})}$$

نکته: اعداد بین صفر و یک هرچه به توان بیشتری برسند، کوچک‌تر می‌شوند.

$$\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۱}=\frac{۱}{۲},\ \left(\frac{۱}{۲}\right)^{۲}=\frac{۱}{۴},\ \left(\frac{۱}{۲}\right)^{۳}=\frac{۱}{۸}$$
$$\Rightarrow\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۱}>\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۲}>\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۳}$$

۶



$$\overset{\Delta}{AMQ}:\ \hat{A}=۹۰^{\circ}\xrightarrow{\text{فیثاغورس}}MQ^{۲}=AM^{۲}+AQ^{۲}=\frac{a^{۲}}{۴}+\frac{a^{۲}}{۴}=\frac{a^{۲}}{۲}$$
$$\Rightarrow MQ=\sqrt{\frac{a^{۲}}{۲}}=\frac{a}{\sqrt{۲}}=\frac{a\sqrt{۲}}{۲}$$

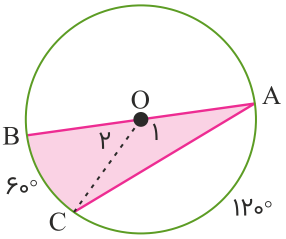
۷

$$f(x_۱) = f(x_۲) \Rightarrow \frac{x_۱ - ۱}{x_۱} = \frac{x_۲ - ۱}{x_۲} \Rightarrow x_۱x_۲ - x_۲ = x_۱x_۲ - x_۱ \Rightarrow x_۱ = x_۲$$

پس تابع یک‌به‌یک است.

۸

از نقطهٔ O به نقطهٔ C وصل می‌کنیم.



واضح است که $\widehat{O}_۱ = ۱۲۰^\circ$ و $\widehat{O}_۲ = ۶۰^\circ$.

نکته: مساحت قطاعی با زاویهٔ α (برحسب رادیان) در دایره با شعاع r از رابطهٔ $S = \frac{۱}{۲}\alpha r^۲$ به دست می‌آید.

مساحت قسمت رنگی شامل مساحت مثلث OAC و قطاع OBC است:

$$S_{\overset{\triangle}{OAC}} = \frac{۱}{۲} \times OA \times OC \times \sin O_۱ = \frac{۱}{۲} \times ۶ \times ۶ \times \sin ۱۲۰^\circ = ۱۸ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۹\sqrt{۳}$$

$$S_{OBC\text{قطاع}} = \frac{۱}{۲} \times OC^۲ \times \alpha = \frac{۱}{۲} \times ۶^۲ \times \frac{\pi}{۳} = ۶\pi$$

$$\Rightarrow S_{\text{رنگی}} = ۶\pi + ۹\sqrt{۳}$$

۹

$$A = \tan(-\frac{\pi}{۶}).\sin(-\frac{\pi}{۳}) - \cot(-\frac{\pi}{۶}) = -\tan\frac{\pi}{۶} \times (-\sin\frac{\pi}{۳}) - (-\cot\frac{\pi}{۶})$$

$$= \frac{\sqrt{۳}}{۳} \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} + \sqrt{۳} = \frac{۱}{۲} + \sqrt{۳}$$

۱۰

مقدار همهٔ کسرها را k فرض می‌کنیم؛ بنابراین:

$$A = ka\,,\ B = kb\,,\ C = kc\,,\ D = kd$$

$$\sqrt{(A+B+C+D)(a+b+c+d)} = \sqrt{(ka+kb+kc+kd)(a+b+c+d)}$$

$$= \sqrt{k(a+b+c+d)^۲} = (a+b+c+d)\sqrt{k} = a\sqrt{k} + b\sqrt{k} + c\sqrt{k} + d\sqrt{k}$$

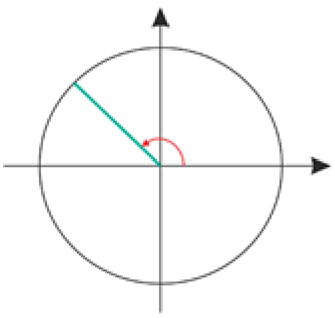
$$= \sqrt{ka^۲} + \sqrt{kb^۲} + \sqrt{kc^۲} + \sqrt{kd^۲} = \sqrt{(ka)a} + \sqrt{(kb)b} + \sqrt{(kc)c} + \sqrt{(kd)d}$$

$$= \sqrt{Aa} + \sqrt{Bb} + \sqrt{Cc} + \sqrt{Dd}$$

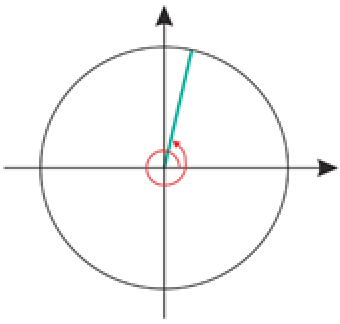
پاسخ سؤالات ۱۱ تا ۱۷

۱۱

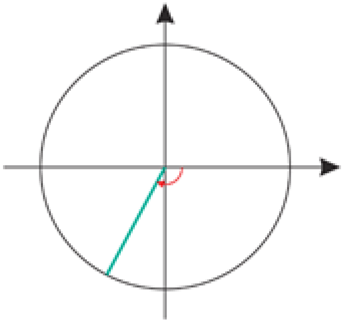
زاویهٔ $\frac{۳\pi}{۴}$ در ناحیه دوم قرار دارد، پس: $\tan\frac{۳\pi}{۴} < ۰$



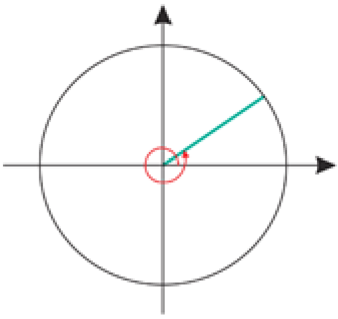
۱۲ زاویهٔ $۴۴۰^\circ = ۳۶۰^\circ + ۸۰^\circ = ۲\pi + ۸۰^\circ$ در ناحیه اول است، درنتیجه: $\tan ۴۴۰^\circ > ۰$



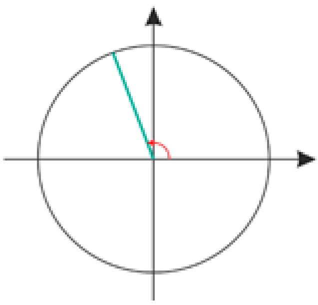
۱۳ زاویهٔ $-\frac{۲\pi}{۳}$ در ناحیه سوم قرار دارد، درنتیجه: $\tan(\frac{-۲\pi}{۳}) > ۰$



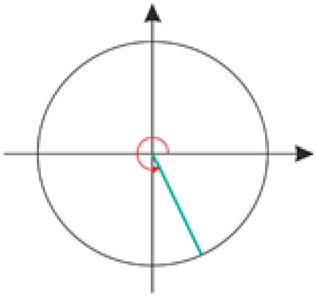
۱۴ زاویهٔ $۴۰۰^\circ = ۲\pi + ۴۰^\circ$ در ناحیه اول قرار دارد، درنتیجه: $\tan ۴۰۰^\circ > ۰$



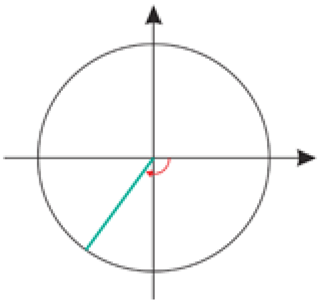
۱۵ زاویهٔ $\frac{۷\pi}{۱۲} = ۱۰۵^\circ$ در ناحیه دوم قرار دارد، درنتیجه: $\tan \frac{۷\pi}{۱۲} < ۰$



۱۶ زاویهٔ $\frac{5\pi}{3}$ در ناحیه چهارم قرار دارد، درنتیجه: $\tan\frac{5\pi}{3} < 0$



۱۷ زاویهٔ $-\frac{3\pi}{5}$ در ناحیه سوم قرار دارد، درنتیجه: $\tan\frac{-3\pi}{5} > 0$



۱۸ الف

$$\frac{3g(0)-f(6)}{3} = \frac{12-3}{3} = 3$$

۱۹ ابتدا سمت چپ تساوی مخرج‌مشترک می‌گیریم:

$$\frac{x^2-(x-1)(x-1)}{x^2-1} = 2x-1$$

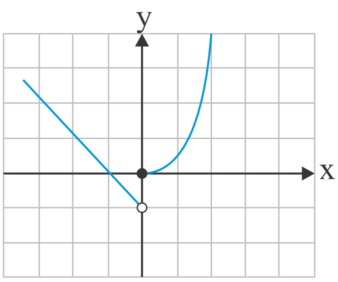
$$\frac{\cancel{2x-1}}{x^2-1} = \cancel{2x-1}$$

$$x^2-1=1 \Rightarrow x=\pm\sqrt{2}$$

$$2x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

پس معادلهٔ فوق سه جواب دارد: $\{\pm\sqrt{2}, \frac{1}{2}\}$

۲۰ یک‌به‌یک نیست، بنابراین وارون‌پذیر نیست.



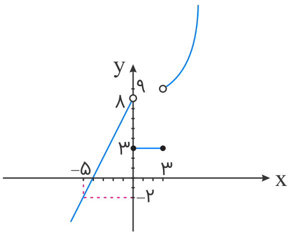
۲۱

الف چون $f(۳) = ۳$ و تابع در بازهٔ $[۰, ۳]$ ثابت است، پس در این بازه $f(x) = ۳$ است. برای $x > ۳$، تابع به‌صورت $f(x) = x^۲$ است.
برای اعداد منفی چون $f(-۵) = -۲$ و $f(-۴) = ۰$ (نمودار محور xها را در نقطه‌ای به طول $x = -۴$ قطع می‌کند) معادلهٔ خطی که از دو نقطهٔ $(-۵, -۲)$ و $(-۴, ۰)$ می‌گذرد را می‌نویسیم:

$$m = \frac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱} = \frac{۰ + ۲}{-۴ + ۵} = ۲ \Rightarrow y - ۰ = ۲(x + ۴) \Rightarrow y = ۲x + ۸$$

پس ضابطهٔ $y = f(x)$ به‌صورت زیر است:

$$f(x) = \begin{cases} x^۲ & ; \ x > ۳ \\ ۳ & ; \ ۰ \leq x \leq ۳ \\ ۲x + ۸ & ; \ x < ۰ \end{cases}$$



$$R_f = (-\infty, ۸) \cup (۹, +\infty)$$

۲۲

الف

$$y_M = \frac{۱۰۳ + ۵۷}{۲} = ۸۰ \text{ میلیون تومان}$$

ب

$$x_M = \frac{۱۳۹۵ + ۱۳۸۵}{۲} = ۱۳۹۰$$

پ

$$۱۰۳ = \frac{۵۷ + y}{۲} \Rightarrow y = ۱۴۹ \text{ میلیون تومان}$$

۲۳ با فرض $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = k$، داریم:

$$a = bk \,,\ c = dk \,,\ e = fk$$

$$\frac{a^۲ + c^۲ + e^۲}{ab + cd + ef} = \frac{(bk)^۲ + (dk)^۲ + (fk)^۲}{(bk)b + (dk)d + (fk)f}$$

$$= \frac{b^۲k^۲ + d^۲k^۲ + f^۲k^۲}{b^۲k + d^۲k + f^۲k} = \frac{(b^۲ + d^۲ + f^۲)k^۲}{(b^۲ + d^۲ + f^۲)k} = k \ \ (*)$$

$$\frac{ab + cd + ef}{b^۲ + d^۲ + f^۲} = \frac{(bk)b + (dk)d + (fk)f}{b^۲ + d^۲ + f^۲}$$

$$= \frac{b^۲k + d^۲k + f^۲k}{b^۲ + d^۲ + f^۲} = \frac{(b^۲ + d^۲ + f^۲)k}{(b^۲ + d^۲ + f^۲)} = k \ (**)$$

$$(*) \,,\ (**) \ \Rightarrow \ \frac{a^۲ + c^۲ + e^۲}{ab + cd + ef} = \frac{ab + cd + ef}{b^۲ + d^۲ + f^۲}$$