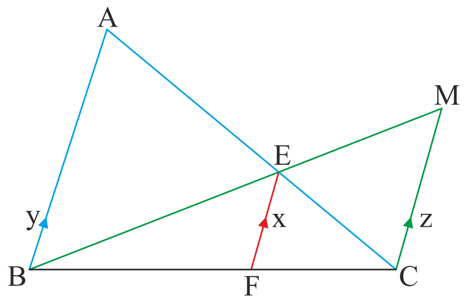
۱ دو تابع $f(x) = \sqrt{x} + ۲$ و $g(x) = \dfrac{۱}{x - ۴}$ را در نظر بگیرید.

الف دامنهٔ تابع $\dfrac{f}{g}$ را به دست آورید.

۲ قطرهای ذوزنقهٔ $ABCD$ $(AB \parallel CD)$ در O متقاطعاند و $۵AB = ۳CD$. اگر $AC = ۱۶$، طول OA و OC را بیابید.

۳ در شکل زیر ثابت کنید: $\dfrac{۱}{x} = \dfrac{۱}{y} + \dfrac{۱}{z}$



۴ تعداد توابعی که از $A = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$ به $B = \{a, b\}$ وجود دارد، چقدر از تعداد توابعی که از B به A وجود دارد، بیشتر است؟

درستی یا نادرستی جمله‌های زیر را تعیین کنید.

۵ تعداد صفرهای تابع $f(x) = x^۳ + x$، سه‌تا است.

۶ معادلهٔ $\sqrt{۲x + ۱} = -x + ۱$ دارای دو ریشهٔ حقیقی است.

جاهای خالی را با کلمات مناسب پُر کنید.

۷ اگر نسبت محیط‌های دو مثلث متشابه ۱۶ باشد، نسبت مساحت‌هایشان .... است.

۸ به ازای کدام مقدار برای m، هر دو جواب معادلهٔ $۲x^۲ - ۲mx + m^۲ - m = ۰$، معکوس یکدیگرند؟

۹ جواب معادلهٔ زیر را به دست آورید.

$$\frac{x^۲}{x^۲ - ۱} - \frac{x - ۱}{x + ۱} = ۲x - ۱$$

۱۰ به روش هندسی تابع $y = [\cos x]$ را در بازهٔ $[۰, ۲\pi]$ رسم کنید.

۱۱ دو تابع $f(x) = \dfrac{۷}{x - ۳}$ و $g(x) = \dfrac{ax + b}{x^۲ + cx + d}$ باهم برابر هستند. مقادیر a, b, c, d را به دست آورید.

۱۲ نقاط M و N وسط‌های اضلاع AB و AC از مثلث ABC است. نسبت مساحت مثلث AMN به چهار ضلعی MNCB را بیابید.

۱۳ $A(۵,۱)$ و $B(۱۰,۴)$ دو رأس مجاور مربع $ABCD$ هستند که این مربع در ناحیهٔ اول صفحهٔ مختصات واقع است. مختصات رئوس C و D را به دست آورید.

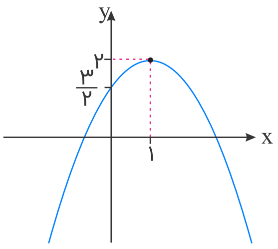
۱۴ اگر $x = ۲$ یکی از صفرهای تابع $f(x) = x^{۳} + ax^{۲} + ۴$ باشد، سایر صفرهای تابع را در صورت وجود بیابید.

۱۵ نمودار تابع $y = x\left[-\dfrac{x}{۲}\right] + ۱$ را در فاصلهٔ $(-۲, ۴]$ رسم کنید.

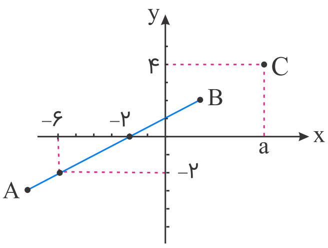
۱۶ حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$A = \cos\frac{\pi}{۹} + \cos\frac{۲\pi}{۹} + \cos\frac{۳\pi}{۹} + \cdots + \cos\frac{۸\pi}{۹}$$

۱۷ اگر نمودار سهمی $f(x) = ax^{۲} + bx + c$ به‌صورت زیر باشد، ضابطهٔ سهمی را مشخص کنید.



۱۸ به ازای چه مقدار a، باتوجه‌به شکل زیر، امتداد خط AB، نقطهٔ C را قطع می‌کند؟



درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید.

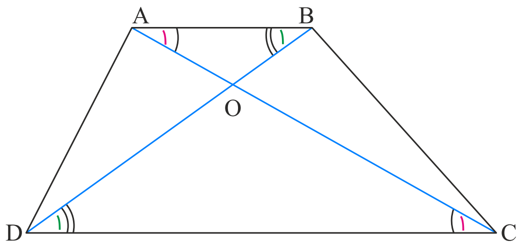
۱۹ دو تابع $f(x) = x$ و $g(x) = \sqrt{x^{۲}}$ باهم مساوی‌اند.

۲۰ اگر دامنهٔ تابع f برابر با $[-۱, ۳]$ باشد، دامنهٔ تابع $g(x) = -۳f(۲x)$ بازهٔ $[-\frac{۱}{۲}, \frac{۳}{۲}]$ است.

۱ الف

$$\begin{matrix} D_f = [۰,+\infty) \\ D_g = \mathbb{R} - \{۴\} \end{matrix} \quad , \quad D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x | g(x) = ۰\} = [۰,+\infty) - \{۴\} \quad [۰,۴) \cup (۴,+\infty)$$

۲ اولاً طبق فرض، $\frac{AB}{CD} = \frac{۳}{۵}$. حال داریم:



$$AB \parallel DC \Rightarrow \hat{A}_۱ = \hat{C}_۱ \,,\, \hat{B}_۱ = \hat{D}_۱ \Rightarrow O\overset{\Delta}{A}B \sim O\overset{\Delta}{C}D$$

$$\Rightarrow \frac{OA}{OC} = \frac{AB}{CD} = \frac{۳}{۵} \Rightarrow OA = ۳x \,,\, OC = ۵x$$

$$\xrightarrow{AC=۱۶} ۸x = ۱۶ \Rightarrow x = ۲ \Rightarrow OA = ۶, OC = ۱۰$$

تذکر: با ترکیب در مخرج در تناسب $\frac{OA}{OC} = \frac{۳}{۵}$ هم می‌توانستیم طول OA را بیابیم.

۳

$$A\overset{\Delta}{B}C : EF \parallel AB \Rightarrow \frac{CF}{BC} = \frac{EF}{AB} \xrightarrow{\text{تفضیل در صورت}} \frac{BC - CF}{BC} = \frac{AB - EF}{AB}$$

$$\Rightarrow \frac{BF}{BC} = \frac{AB - EF}{AB} \quad (۱)$$

$$B\overset{\Delta}{M}C : EF \parallel MC \Rightarrow \frac{BF}{BC} = \frac{EF}{MC} \quad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} \frac{EF}{MC} = \frac{AB - EF}{AB} \Rightarrow \frac{x}{z} = \frac{y - x}{y} \Rightarrow \frac{x}{z} = ۱ - \frac{x}{y} \Rightarrow \frac{x}{z} + \frac{x}{y} = ۱$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین تساوی تقسیم بر } x} \frac{۱}{z} + \frac{۱}{y} = \frac{۱}{x}$$

۴ تعداد توابعی که از A به B وجود دارد، $۲^۵$ حالت است و تعداد توابعی از B به A وجود دارد، $۵^۲$ حالت است. پس:

$$\text{اختلاف تعداد توابع} = ۳۲ - ۲۵ = ۷$$

پاسخ سؤالات ۵ تا ۶

۵ نادرست است.

$$f(x) = x^۳ + x = ۰ \Rightarrow x(x^۲ + ۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ x^۲ + ۱ = ۰ \Rightarrow x^۲ = -۱ \quad \text{غ.ق.ق} \end{cases}$$

پس تابع فقط یک صفر دارد.

۶ نادرست است.

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} ۲x + ۱ = x^۲ - ۲x + ۱ \Rightarrow x^۲ - ۴x = ۰$$

$$\Rightarrow x(x - ۴) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ x = ۴ \quad \text{غ.ق.ق} \end{cases}$$

دقت کنید $x = ۴$ سمت راست تساوی را منفی می‌کند و چون علامت سمت چپ معادله مثبت است، این جواب قابل‌قبول نیست.

پاسخ سؤال ۷

۷ $۱۶^۲$

۸

$$۲x^۲ - ۲mx + (m^۲ - m) = ۰ \Rightarrow x^۲ - mx + (\frac{m^۲ - m}{۲}) = ۰$$

$$\Rightarrow \text{حاصل‌ضرب ریشه‌ها} = \frac{c}{a} = ۱ \Rightarrow \frac{m^۲ - m}{۲} = ۱ \Rightarrow m^۲ - m = ۲ \Rightarrow m^۲ - m - ۲ = ۰$$

$$\Rightarrow m = \frac{۱ \pm \sqrt{۹}}{۲} = \frac{۱ \pm ۳}{۲} \Rightarrow \begin{cases} m = ۲ \\ m = -۱ \end{cases}$$

حال هر دو جواب را در معادلهٔ صورت سوال جایگذاری می‌کنیم:

$$\begin{cases} m = ۲ : ۲x^۲ - ۴x + ۲ = ۰ \Rightarrow \Delta = ۰ \quad \text{غ.ق.ق} \\ m = -۱ : ۲x^۲ + ۲x = ۰ \Rightarrow x = -۱, ۰ \quad \text{غ.ق.ق} \end{cases}$$

بنابراین مقداری برای m یافت نشد.

۹ ابتدا سمت چپ تساوی مخرج‌مشترک می‌گیریم:

$$\frac{x^۲ - (x - ۱)(x - ۱)}{x^۲ - ۱} = ۲x - ۱$$

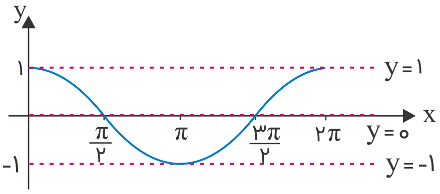
$$\frac{\cancel{۲x - ۱}}{x^۲ - ۱} = \cancel{۲x - ۱}$$

$$x^۲ - ۱ = ۱ \Rightarrow x = \pm\sqrt{۲}$$

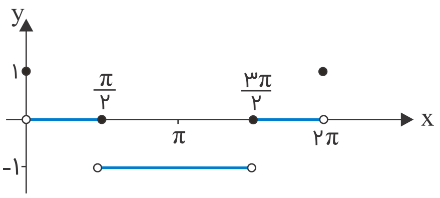
$$۲x - ۱ = ۰ \Rightarrow x = \frac{۱}{۲}$$

پس معادلهٔ فوق سه جواب دارد: $\{\pm\sqrt{۲}, \frac{۱}{۲}\}$

۱۰ برای رسم هندسی تابع $y = [\cos x]$، خطوط $y = k$ $(k \in \mathbb{Z})$ را رسم کرده تا نمودار $y = \cos x$ را قطع کند.



سپس نقاط تقاطع را توپر قرار داده و در حد فاصل بین $y = k$ $(k \in \mathbb{Z})$، نمودار را به سمت عدد کمتر، شُر می‌دهیم.



۱۱

$$D_f = \mathbb{R} - \{۳\}$$

D_g باید با D_f برابر باشد.

$$x^۲ + cx + d = (x - ۳)^۲ = x^۲ - ۶x + ۹$$

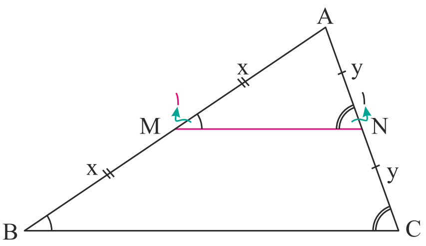
$$\Rightarrow c = -۶\ ,\ d = ۹$$

حال دو ضابطه را برابر قرار می‌دهیم:

$$\frac{ax + b}{(x - ۳)^۲} = \frac{۷}{x - ۳} \Rightarrow ax + b = ۷x - ۲۱$$

$$\Rightarrow a = ۷\ ,\ b = -۲۱$$

۱۲

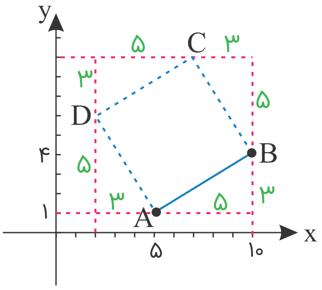


$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} = ۱ \xrightarrow{\text{عکس تالس}} MN \parallel BC \Rightarrow \hat{M}_۱ = \hat{B}, \hat{N}_۱ = \hat{C} \Rightarrow A\overset{\Delta}{M}N \sim A\overset{\Delta}{B}C$$

$$\Rightarrow \frac{S_{A\overset{\Delta}{M}N}}{S_{A\overset{\Delta}{B}C}} = \left(\frac{AM}{AB}\right)^۲ = \left(\frac{۱}{۲}\right)^۲ = \frac{۱}{۴}\ (*)$$

$$S_{A\overset{\Delta}{M}N} = S \xrightarrow{(*)} S_{A\overset{\Delta}{B}C} = ۴S \Rightarrow S_{MNCB} = ۴S - S = ۳S \Rightarrow \frac{S_{A\overset{\Delta}{M}N}}{S_{MNCB}} = \frac{S}{۳S} = \frac{۱}{۳}$$

۱۳ نقاط A و B را در صفحهٔ مختصات مشخص می‌کنیم:



چهار مثلثی که در کنار اضلاع مربع تشکیل شده‌اند، همنهشت هستند.

$$\begin{cases} y_D = y_A + ۵ = ۶ \\ x_D = x_A - ۳ = ۲ \end{cases} \Rightarrow D(۲,۶)$$

$$\begin{cases} y_C = y_B + ۵ = ۹ \\ x_C = x_B - ۳ = ۷ \end{cases} \Rightarrow C(۷,۹)$$

۱۴ $x = ۲$ یک ریشهٔ معادلهٔ $f(x) = ۰$ است، پس در آن صادق است:

$$x = ۲ \Rightarrow ۲^۳ + a(۲)^۲ + ۴ = ۰ \Rightarrow a = -۳$$

برای یافتن عامل‌های دیگر باید سه‌جمله‌ای $f(x)$ را بر $x - ۲$ تقسیم کرد:

$$\begin{array}{l|l} x^۳ - ۳x^۲ + ۴ & x - ۲ \\ \cline{2-2} \underline{x^۳ - ۲x^۲} & x^۲ - x - ۲ \\ \quad - x^۲ + ۴ & \\ \quad \underline{-x^۲ + ۲x} & \\ \quad\quad - ۲x + ۴ & \\ \quad\quad \underline{-۲x + ۴} & \\ \quad\quad\quad ۰ & \end{array}$$

$$\Rightarrow x^۳ - ۳x^۲ + ۴ = (x - ۲)(x^۲ - x - ۲) = (x - ۲)^۲(x + ۱)$$

پس $x = -۱$ صفر دیگر تابع است.

تذکر: به جای تقسیم می‌توان سه‌جمله‌ای را تجزیه کرد:

$$x^۳ - ۳x^۲ + ۴ = x^۳ - ۳x^۲ + ۳ + ۱ = x^۳ + ۱ - ۳x^۲ + ۳$$

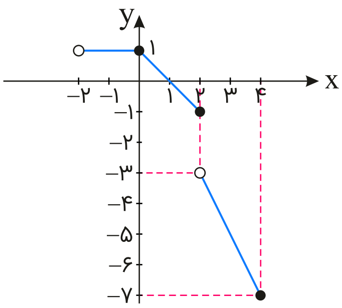
$$= (x + ۱)(x^۲ - x + ۱) - ۳(x^۲ - ۱)$$

$$= (x + ۱)(x^۲ - x + ۱ - ۳x + ۳) = (x + ۱)(x - ۲)^۲$$

۱۵ برای رسم تابع داده‌شده فاصله‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

$$-۲ < x \leq ۰ \Rightarrow -۱ < \frac{x}{۲} \leq ۰ \Rightarrow ۰ \leq -\frac{x}{۲} < ۱ \Rightarrow \left[-\frac{x}{۲}\right] = ۰ \Rightarrow y = x \times ۰ + ۱ \Rightarrow y = ۱$$
$$۰ < x \leq ۲ \Rightarrow ۰ < \frac{x}{۲} \leq ۱ \Rightarrow -۱ \leq -\frac{x}{۲} < ۰ \Rightarrow \left[-\frac{x}{۲}\right] = -۱ \Rightarrow y = -x + ۱$$
$$۲ < x \leq ۴ \Rightarrow ۱ < \frac{x}{۲} \leq ۲ \Rightarrow -۲ \leq -\frac{x}{۲} < -۱ \Rightarrow \left[-\frac{x}{۲}\right] = -۲ \Rightarrow y = -۲x + ۱$$

در هر فاصله نقاط کمکی ابتدای فاصله را استفاده می‌کنیم و نمودار تابع را رسم می‌کنیم.



۱۶ $\frac{\pi}{۹}$ و $\frac{۸\pi}{۹}$ مکمل هستند. همچنین زوایای $\frac{۲\pi}{۹}$ و $\frac{۷\pi}{۹}$ و $\frac{۳\pi}{۹}$ و $\frac{۵\pi}{۹}$ مکمل هستند. می‌دانیم کسینوس دو زاویهٔ مکمل قرینه‌اند، پس حاصل A برابر صفر می‌شود.

۱۷ نکته: در سهمی $y = ax^۲ + bx + c$، نقطه‌ای به‌طول $x = -\frac{b}{۲a}$ رأس سهمی است.

$$x = -\frac{b}{۲a} \Rightarrow ۱ = -\frac{b}{۲a} \Rightarrow ۲a + b = ۰$$
$$(۱,۲) \in f \Rightarrow a + b + c = ۲$$
$$(۰,\frac{۳}{۲}) \in f \Rightarrow c = \frac{۳}{۲}$$

از سه مورد بالا به دستگاه $\begin{cases} ۲a + b = ۰ \\ a + b = \frac{۱}{۲} \end{cases}$ می‌رسیم که پس از حل داریم: $a = -\frac{۱}{۲}\ ,\ b = ۱$

پس ضابطهٔ سهمی به‌صورت $f(x) = -\frac{۱}{۲}x^۲ + x + \frac{۳}{۲}$ است.

۱۸ دو نقطهٔ $(-۲,۰)$ و $(-۶,-۲)$ روی خط AB قرار دارند:

$$m_{AB} = \frac{۰ - (-۲)}{-۲ - (-۶)} = \frac{۱}{۲}$$

$$y - y_۰ = m(x - x_۰) \Rightarrow y - ۰ = \frac{۱}{۲}(x + ۲) \Rightarrow y = \frac{۱}{۲}x + ۱$$

حال چون عرض نقطهٔ C، ۴ است، پس نقطهٔ C باید در معادلهٔ فوق صدق کند.

$$y = \frac{۱}{۲}x + ۱ \Rightarrow ۴ = \frac{۱}{۲}a + ۱ \Rightarrow a = ۶$$

پاسخ سؤالات ۱۹ تا ۲۰

۱۹ نادرست

۲۰ درست