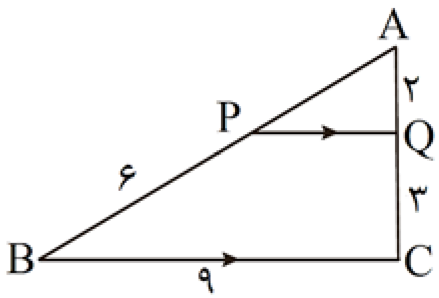
مدرسه آموزشگاه ندای دانش | پایه یازدهم تجربی | درس ریاضی

مبحث امتحان نوبت اول

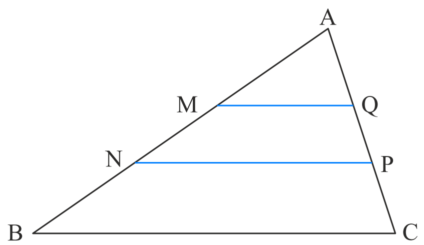
نام و نام‌خانوادگی

۱ طول قاعده‌ها و ارتفاع یک ذوزنقه، به ترتیب ۶، ۱۰ و ۸ واحد است. قطرهای ذوزنقه را رسم می‌کنیم. مساحت هر یک از چهار مثلث داخل ذوزنقه را بیابید.

۲ در شکل زیر $PQ \parallel BC$ است. طول پاره‌خط‌های AP و PQ را به دست آورید.

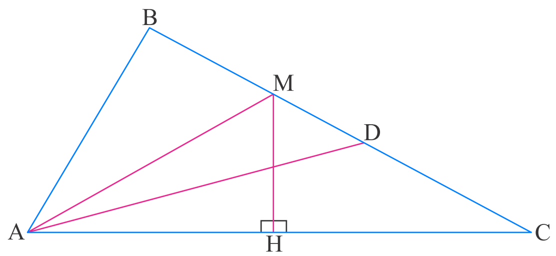


۳ در شکل زیر، هر یک از اضلاع AB و AC به سه قسمت مساوی تقسیم شده است. حاصل $\frac{S_{MNPQ}}{S_{NBCP}}$ را بیابید.



۴ تابع $y = \frac{۱}{[x] - ۲}$ مفروض است؛ دامنهٔ آن را تعیین کنید.

۵ در شکل زیر، اگر $AB = BD$ و $AH = HC$، ثابت کنید $B\hat{A}M = ۲D\hat{A}C$.



۶ اگر $f = \{(۱, -۱), (۳, ۲), (۲, -۲), (-۳, ۰)\}$، $g = \{(۰, ۳), (۲, -۲), (۳, ۱), (۱, ۰)\}$ دو تابع باشند:

الف دامنه تابع $\frac{f}{g}$ را بنویسید.

۷ نمودار تابع $f(x) = \frac{x^۴ - ۵x^۲ + ۴}{x^۲ - ۱}$ را رسم کنید.

۸ در مثلث ABC از A عمودهای AM و AN را بر نیمسازهای خارجی زاویه‌های B و C رسم می‌کنیم. ثابت کنید:

الف MN با BC موازی است.

ب MN از وسط AB و AC می‌گذرد.

پ طول MN نصف محیط مثلث ABC است.

۹ دامنهٔ توابع زیر را به دست آورید.

الف

$$f(x) = \sqrt{۲x^۲ - x - ۱}$$

ب

$$g(x) = \frac{x(x-۱)}{x^۴ - ۱۰x^۲ + ۹}$$

۱۰ فرض کنید نقطهٔ A به فاصلهٔ ۴ سانتی‌متر از خط d باشد. روش رسم هر یک از مثلث‌های زیر را توضیح دهید.

الف مثلثی متساوی‌الساقین که A یک رأس آن و قاعدهٔ آن بر خط d منطبق باشد.

ب مثلثی متساوی‌الساقین که A یک رأس آن و قاعدهٔ آن بر خط d منطبق باشد و طول ساق آن ۶ سانتی‌متر باشد.

پ مثلثی متساوی‌الساقین که A یک رأس آن و قاعدهٔ آن بر خط d منطبق باشد و مساحت آن $۸\,cm^۲$ باشد.

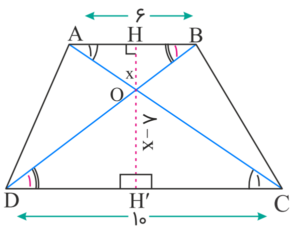
۱۱ اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $۳x^۲ - ۶x - ۱ = ۰$ باشند، بدون حل معادله، حاصل عبارت $\frac{\beta^۲}{\alpha} + \frac{\alpha^۲}{\beta}$ را بیابید.

۱۲ از نقطهٔ A روی نیمساز زاویهٔ $x\hat{O}y = ۱۲۰^\circ$ خطی عبور می‌دهیم تا اضلاع زاویه را در نقاط B و C قطع کند. ثابت کنید: $\frac{۱}{OA} = \frac{۱}{OB} + \frac{۱}{OC}$

۱۳ ثابت کنید پاره‌خطی که اوساط دو ساق یک ذوزنقه را به هم وصل می‌کند، از وسط دو قطر می‌گذرد.

۱۴ اگر $f(x) = ۳x + ۵$ باشد، مقدار $f^{-۱}(۸)$ را تعیین کنید.

۱ ارتفاع ذوزنقه را رسم می‌کنیم. حال داریم:



$$AB \parallel DC \Rightarrow \hat{A}_۱ = \hat{C}_۱ , \hat{B}_۱ = \hat{D}_۱ \Rightarrow O\overset{\Delta}{A}B \sim O\overset{\Delta}{C}D$$

$$\Rightarrow (\text{نسبت ارتفاع‌ها}) = (\text{نسبت تشابه}) \Rightarrow \frac{OH}{OH'} = \frac{AB}{DC}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{۸ - x} = \frac{۳}{۵} \Rightarrow ۵x = ۲۴ - ۳x \Rightarrow ۸x = ۲۴ \Rightarrow x = ۳$$

$$S_{O\overset{\Delta}{A}B} = \frac{۱}{۲}(AB)(OH) = \frac{۱}{۲}(۶)(۳) = ۹$$

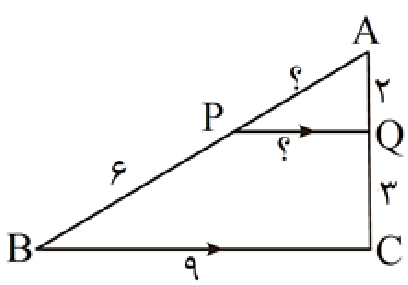
$$S_{O\overset{\Delta}{C}D} = \frac{۱}{۲}(DC)(OH') = \frac{۱}{۲}(۱۰)(۸ - ۳) = ۲۵$$

$$S_{O\overset{\Delta}{B}C} = S_{B\overset{\Delta}{D}C} - S_{O\overset{\Delta}{C}D} = \frac{۱}{۲}(DC)(HH') - ۲۵$$

$$= \frac{۱}{۲}(۱۰)(۸) - ۲۵ = ۴۰ - ۲۵ = ۱۵$$

به روش مشابه : $S_{O\overset{\Delta}{A}D} = S_{O\overset{\Delta}{B}C} = ۱۵$

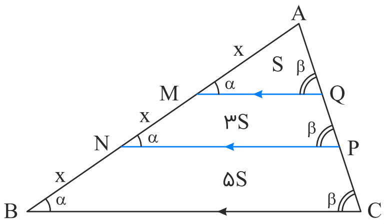
۲



$PQ \parallel BC \Rightarrow$ طبق قضیه تالس : $\frac{AP}{BP} = \frac{AQ}{QC} \Rightarrow \frac{AP}{۶} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow AP = \frac{۶ \times ۲}{۳} \Rightarrow AP = ۴$

$PQ \parallel BC \Rightarrow$ طبق قضیه تالس : $\frac{AQ}{AC} = \frac{PQ}{BC} \Rightarrow \frac{۲}{۲ + ۳} = \frac{PQ}{۹} \Rightarrow PQ = \frac{۹ \times ۲}{۵} \Rightarrow PQ = \frac{۱۸}{۵}$

۳ اولاً طبق عکس قضیهٔ تالس، $MQ \parallel NP \parallel BC$ و درنتیجه مثلث‌های AMQ، ANP و ABC متشابه‌اند. حال با فرض $S = S_{\overset{\Delta}{AMQ}}$، داریم:



$$\frac{S_{\overset{\Delta}{AMQ}}}{S_{\overset{\Delta}{ANP}}} = \left(\frac{AM}{AN}\right)^{۲} = \left(\frac{۱}{۲}\right)^{۲} = \frac{۱}{۴}$$

$$\Rightarrow S_{\overset{\Delta}{ANP}} = ۴S_{\overset{\Delta}{AMQ}} = ۴S \Rightarrow S_{MNPQ} = ۴S - S = ۳S$$

$$\overset{\Delta}{ANP} \sim \overset{\Delta}{ABC} \Rightarrow \frac{S_{\overset{\Delta}{ANP}}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}} = \left(\frac{AN}{AB}\right)^{۲} = \left(\frac{۲}{۳}\right)^{۲} = \frac{۴}{۹}$$

$$\Rightarrow \frac{۴S}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}} = \frac{۴}{۹} \Rightarrow S_{\overset{\Delta}{ABC}} = ۹S$$

$$S_{NBCP} = ۹S - ۴S = ۵S \Rightarrow \frac{S_{MNPQ}}{S_{NBCP}} = \frac{۳S}{۵S} = \frac{۳}{۵}$$

۴

$$[x] - ۲ = ۰ \Rightarrow [x] = ۲ \Rightarrow ۲ \le x < ۳ \Rightarrow D = \mathbb{R} - [۲, ۳)$$

۵ فرض کنیم $\hat{A}_۱ = \alpha$ و $\hat{A}_۲ = \beta$. طبق معلومات مسئله، داریم:

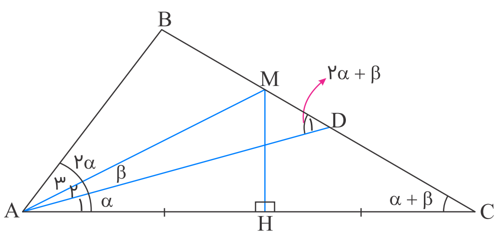
M روی عمودمنصف AC است $\Rightarrow MC = MA$

$$\overset{\Delta}{MCA} : MC = MA \Rightarrow \hat{C} = \hat{A}_۱ + \hat{A}_۲ = \alpha + \beta$$

$\hat{D}_۱$ زاویهٔ خارجی $\overset{\Delta}{DAC}$ است $\Rightarrow \hat{D}_۱ = \hat{A}_۱ + \hat{C} = ۲\alpha + \beta$

$$\overset{\Delta}{BAD} : AB = BD \Rightarrow B\hat{A}D = B\hat{D}A \Rightarrow \beta + \hat{A}_۳ = ۲\alpha + \beta \Rightarrow \hat{A}_۳ = ۲\alpha$$

$$\Rightarrow \hat{A}_۳ = ۲\hat{A}_۱$$



۶ **الف**

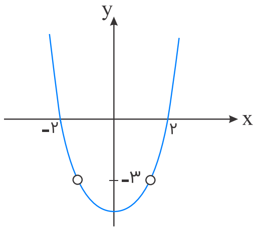
$$D_{f/g} = D_f \cap D_g - \{x | g(x) = ۰\} = \{۳ , ۲\}$$

۷ برای رسم نمودار تابع، ابتدا دامنه را به دست می‌آوریم: $D_f = \mathbb{R} - \{\pm ۱\}$

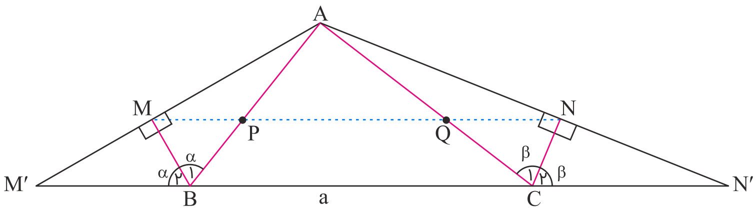
سپس تابع f را تا آنجا که می‌توانیم ساده می‌کنیم:

$$\Rightarrow f(x) = \frac{x^۴ - ۵x^۲ + ۴}{x^۲ - ۱} = \frac{(x^۲ - ۴)(x^۲ - ۱)}{x^۲ - ۱}$$
$$= x^۲ - ۴ = (x - ۲)(x + ۲)$$

حال تابع درجهٔ ۲، $f(x) = x^۲ - ۴$ را با دامنهٔ $\mathbb{R} - \{\pm ۱\}$ رسم می‌کنیم:



۸ **الف** AM و AN را امتداد می‌دهیم تا امتداد BC را در M' و N' قطع کند. حال داریم:



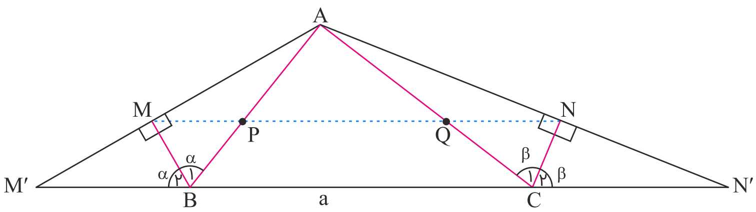
$$\begin{cases} \hat{B}_۱ = \hat{B}_۲ \\ BM = BM \\ A\hat{M}B = M'\hat{M}B = ۹۰^\circ \end{cases} \Rightarrow \overset{\Delta}{AMB} \cong \overset{\Delta}{M'MB} \Rightarrow AM = MM', AB = BM'$$

به روش مشابه:

$$\Rightarrow AN = NN', AC = CN'$$

$$\overset{\Delta}{AM'N'} : \frac{AM}{MM'} = \frac{AN}{NN'} = ۱ \xrightarrow{\text{عکس تالس}} MN \parallel M'N' \Rightarrow MN \parallel BC$$

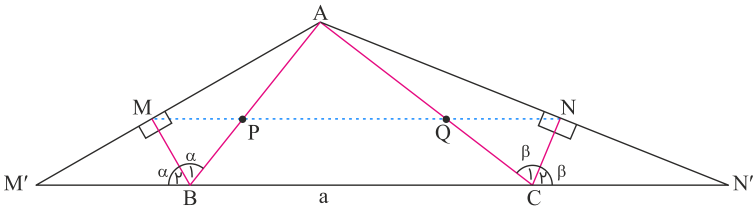
ب



$$\overset{\Delta}{ABM'} : MP \parallel M'B \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AP}{PB} = \frac{AM}{MM'} = ۱ \Rightarrow AP = PB$$

درنتیجه P وسط AB است و به روش مشابه Q وسط AC است.

پ



$$MN \parallel M'N' \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{MN}{M'N'} = \frac{AM}{AM'} = \frac{۱}{۲}$$
$$\Rightarrow \frac{MN}{\underbrace{M'B}_{AB} + BC + \underbrace{CN'}_{AC}} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow MN = \frac{۱}{۲}\left(\text{محیط}\left(A\overset{\Delta}{B}C\right)\right)$$

۹ الف

عبارت زیر رادیکال را بزرگ‌تر یا مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$۲x^۲ - x - ۱ \geq ۰ \Rightarrow (x-۱)(۲x+۱) \geq ۰$$
$$\Rightarrow x \geq ۱ \text{ یا } x \leq -\frac{۱}{۲} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - (-\frac{۱}{۲}, ۱)$$

ب

مخرج کسر را مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$x^۴ - ۱۰x^۲ + ۹ = ۰ \Rightarrow (x^۲ - ۹)(x^۲ - ۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x^۲ = ۹ \Rightarrow \begin{cases} x = ۳ \\ x = -۳ \end{cases} \\ x^۲ = ۱ \Rightarrow \begin{cases} x = ۱ \\ x = -۱ \end{cases} \end{cases}$$

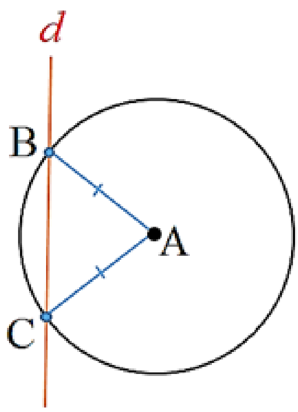
پس:

$$D_g = \mathbb{R} - \{\pm ۳, \pm ۱\}$$

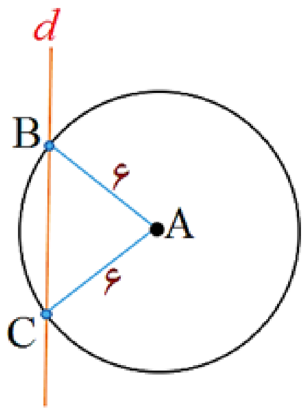
۱۰ الف

دایره‌ای به مرکز A و شعاع r (بیشتر از ۴ باشد) رسم می‌کنیم. محل برخورد این دایره با خط d همان نقاط دیگر رأس‌های مثلث است زیرا:

$$AC = AB = r$$



ب دایره‌ای به مرکز A و شعاع $r = ۶$ رسم می‌کنیم. محل برخورد این دایره با خط d همان نقاط دیگر رأس‌های مثلث است زیرا: $AC = AB = ۶$

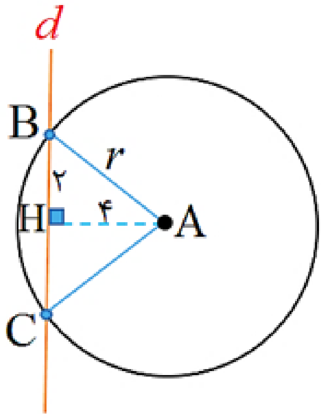


پ چون فاصله عمودی نقطه A از خط d برابر ۴ است و این فاصله همان ارتفاع مثلث است، اگر بخواهیم مساحت این مثلث ۸ سانتی‌متر مربع باشد باید قاعده آن ۴ سانتی‌متر باشد یعنی فاصله دو نقطه B و C روی خط d برابر ۴ باشد، درنتیجه طبق قضیه فیثاغورث داریم:

$$(AB)^۲ = (AH)^۲ + (BH)^۲ \Rightarrow r^۲ = (۴)^۲ + (۲)^۲ = ۱۶ + ۴ = ۲۰ \Rightarrow r = \sqrt{۲۰}$$

بنابراین اگر دایره‌ای به شعاع $\sqrt{۲۰}$ رسم کنیم، محل برخورد این دایره با خط d همان نقاط دیگر رأس‌های مثلث است زیرا: $AC = AB = \sqrt{۲۰}$ این همان مثلثی است که مساحت آن ۸ می‌شود.

$$S_{ABC} = \frac{۱}{۲}(۴)(۴) = ۸$$



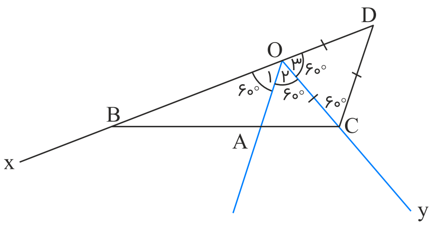
۱۱

$$۳x^۲ - ۶x - ۱ = ۰ \Rightarrow S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = ۲ \ , \ P = \alpha.\beta = \frac{c}{a} = \frac{-۱}{۳}$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha^۲}{\beta} + \frac{\beta^۲}{\alpha} = \frac{\alpha^۳ + \beta^۳}{\alpha\beta} = \frac{(\alpha+\beta)^۳ - ۳\alpha\beta(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}$$

$$= \frac{S^۳ - ۳PS}{P} = \frac{۲^۳ - ۳(-\frac{۱}{۳}) \times ۲}{-\frac{۱}{۳}} = \frac{۸ + ۲}{-\frac{۱}{۳}} = -۳۰$$

۱۲ از C خطی به موازات AO رسم می‌کنیم تا امتداد Ox را در نقطهٔ D قطع کند:



حال داریم:

$$OA \parallel DC \Rightarrow \widehat{C} = \widehat{O}_۲ = ۶۰^\circ \xrightarrow{\widehat{O}_۳ = ۶۰^\circ} \widehat{D} = ۶۰^\circ$$

پس مثلث OCD متساوی‌الاضلاع است و $OC = CD = OD$. حال داریم:

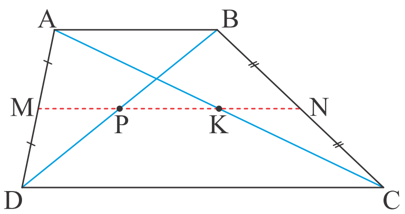
$$\overset{\Delta}{BCD} : AO \parallel CD \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{OA}{DC} = \frac{OB}{BD} \ (*)$$

$$\xrightarrow{(*)} \frac{OA}{OB} = \frac{DC}{BD} \xrightarrow{OD=DC} \frac{OA}{OB} = \frac{OD}{BD} \ (**)$$

$$\xrightarrow{(*),(**)} \frac{OA}{OC} + \frac{OA}{OB} = \frac{OB}{BD} + \frac{OD}{BD} = \frac{BD}{BD} = ۱$$

$$\xrightarrow{\times \frac{۱}{OA}} \frac{۱}{OC} + \frac{۱}{OB} = \frac{۱}{OA}$$

۱۳



$$\frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NC} \xrightarrow{\text{عکس تالس در ذوزنقه}} MN \parallel AB \parallel DC$$

$$\overset{\Delta}{ABD} : MP \parallel AB \Rightarrow \frac{DM}{MA} = \frac{DP}{PB} \Rightarrow DP = PB$$

$$\overset{\Delta}{CBA} : NK \parallel AB \Rightarrow \frac{CN}{NB} = \frac{CK}{KA} \Rightarrow CK = KA$$

۱۴

$$۳x + ۵ = ۸ \Rightarrow x = ۱ \Rightarrow (۱, ۸) \in f \Rightarrow f^{-۱}(۸) = ۱$$