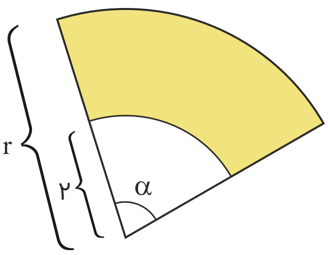
۱ نمودار تابع $y = x[x]|x|$ را در بازهٔ $[-1, 2]$ رسم کنید.

جاهای خالی را با عدد و یا عبارت ریاضی مناسب پر کنید.

۲ مجموعهٔ جواب معادلهٔ $5 = \dfrac{3}{x-1} + \dfrac{x}{x-3}$ برابر است با ....

۳ اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^2 + bx + c = 0$ باشند ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $cx^2 + bx + a = 0$ برابرند با .... و ....$(c \neq 0)$

۴ اگر محیط قسمت رنگی ۱۳ سانتی‌متر و مساحت آن ۱۰/۵ سانتی‌متر مربع باشد، r و α را حساب کنید.

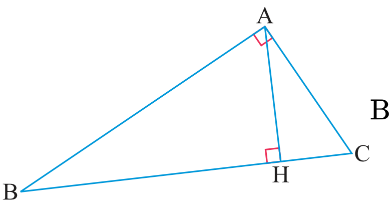


۵ نمودار تابع $f(x) = \dfrac{3}{2}\sin x - 2$ بر کدام‌یک از نمودارهای زیر منطبق است؟

الف) $g(x) = \dfrac{3}{2}\sin(2\pi - x) - 2$

ب) $h(x) = -\dfrac{3}{2}\cos(\dfrac{\pi}{2} + x) - 2$

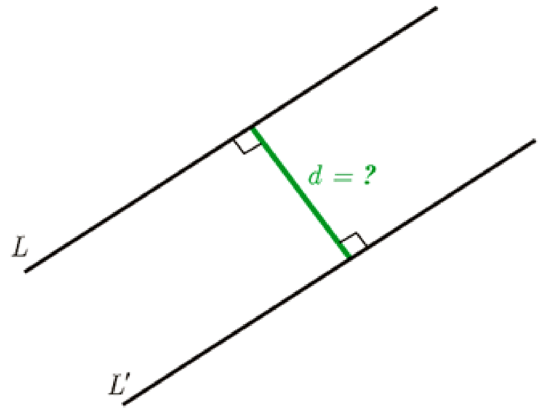
۶ در مثلث قائم‌الزاویه زیر اندازه پاره‌خط‌های خواسته‌شده را به دست آورید.



$BH = 9\ ,\ AH = 6\ ,\ BC = ?\ ,\ AC = ?$

۷ دو نقطهٔ $A(2\ ,\ 4)$ و $B(1\ ,\ 0)$ نسبت به خط Δ قرینهٔ یکدیگرند. معادلهٔ خط Δ را به دست آورید.

۸ دو خط با معادلات $5x - 12y + 8 = 0$ و $-10x + 24y + 10 = 0$ را در نظر بگیرید:



الف نشان دهید دو خط با یکدیگر موازی هستند.

ب فاصلهٔ این دو خط را محاسبه کنید.

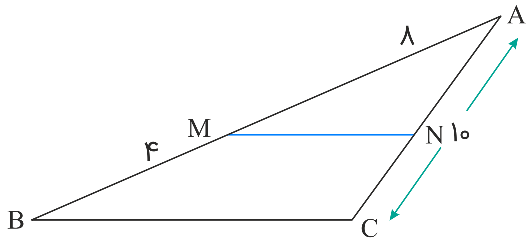
۹ به ازای کدام مقدار برای m، هر دو جواب معادلهٔ $۲x^۲ - ۲mx + m^۲ - m = ۰$، معکوس یکدیگرند؟

نمودار توابع زیر را رسم کنید:

۱۰ $y = |x| - ۲[x] \quad ; -۱ \le x \le ۲$

۱۱ اگر $\frac{e}{f} = \frac{c}{d} = \frac{a}{b}$، ثابت کنید: $\frac{ab + cd + ef}{b^۲ + d^۲ + f^۲} = \frac{a^۲ + c^۲ + e^۲}{ab + cd + ef}$

۱۲ در شکل زیر که $MN \parallel BC$، طول AN و NC را بیابید.



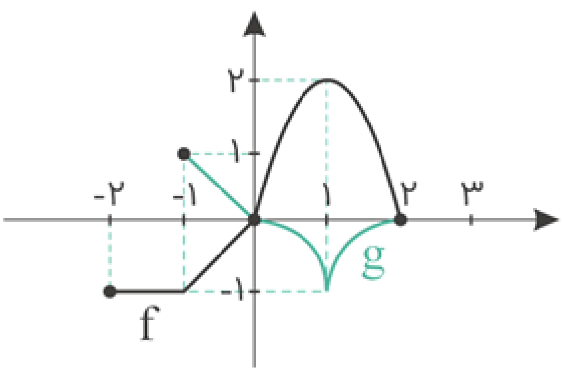
۱۳ مقدار عبارت $\frac{۱}{۱ + \cot^۲ ۱^\circ} + \frac{۱}{۱ + \cot^۲ ۲^\circ} + \dots + \frac{۱}{۱ + \cot^۲ ۸۹^\circ}$ را به دست آورید.

۱۴ اگر $f = \{(۲,۱), (۳,۴), (۰,۲)\}$ باشد، توابع $f + \frac{۱}{f}$ و $f + f^{-۱}$ را بیابید.

۱۵ اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $۲x^۲ - mx + ۱ = ۰$ باشد و داشته باشیم $\frac{\alpha - ۱}{\beta} = ۴$، مقدار m را تعیین کنید.

۱۶ طول دو ارتفاع از مثلث متساوی‌الساقینی ۸ واحد و طول قاعدهٔ آن ۱۰ واحد است. طول ارتفاع سوم این مثلث را بیابید.

۱۷ اگر نمودار توابع f و g به‌صورت زیر باشد، دامنهٔ تابع $\sqrt{f} + \frac{۱}{g}$ را بیابید.



۱۸ نقاط M و N وسط‌های اضلاع AB و AC از مثلث ABC است. نسبت مساحت مثلث AMN به چهار ضلعی MNCB را بیابید.

۱۹ اگر α یکی از ریشه‌های معادلهٔ $x^{۳} - ۷x + ۴ = ۰$ باشد، حاصل $\alpha^{۲} - \frac{۴}{\alpha} -$ را به دست آورید.

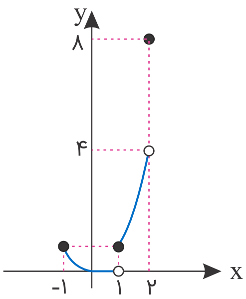
۱

$$-۱ \leq x < ۰ \Rightarrow y = x(-۱)(-x) = x^۲$$

$$۰ \leq x < ۱ \Rightarrow y = ۰$$

$$۱ \leq x < ۲ \Rightarrow y = x^۲$$

$$x = ۲ \Rightarrow y = ۸$$



پاسخ سؤالات ۲ تا ۳

۲ برای حل معادله، طرفین را در کوچک‌ترین مضرب مشترک مخرج‌ها ضرب می‌کنیم:

$$\frac{x}{x-۳} + \frac{۳}{x-۱} = ۵ \Rightarrow x(x-۱) + ۳(x-۳) = ۵(x-۱)(x-۳)$$

$$\Rightarrow x^۲ - x + ۳x - ۹ = ۵(x^۲ - ۴x + ۳)$$

$$\Rightarrow x^۲ + ۲x - ۹ = ۵x^۲ - ۲۰x + ۱۵$$

$$۴x^۲ - ۲۲x + ۲۴ = ۰ \Rightarrow ۲(۲x^۲ - ۱۱x + ۱۲) = ۰$$

$$۲(۲x-۳)(x-۴) = ۰ \Rightarrow x = \frac{۳}{۲}\ ,\ x = ۴$$

$$\text{مجموعه جواب} = \left\{۴, \frac{۳}{۲}\right\}$$

۳ ریشه‌های معادله اول α و β هستند بنابراین:

$$S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} \ , \ P = \alpha.\beta = \frac{c}{a} \ \ (*)$$

مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادله جدید به صورت زیر است:

$$S' = \frac{-b}{c} \ , \ P' = \frac{a}{c}$$

باتوجه به روابط (*) داریم:

$$P' = \frac{a}{c} = \frac{۱}{\alpha\beta} = \frac{۱}{\alpha}.\frac{۱}{\beta}$$

$$S' = \frac{-b}{c} = \frac{\frac{-b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{\alpha+\beta}{\alpha.\beta} = \frac{\alpha}{\alpha.\beta} + \frac{\beta}{\alpha.\beta} = \frac{۱}{\beta} + \frac{۱}{\alpha}$$

پس ریشه‌ها به صورت $\frac{۱}{\beta}$ و $\frac{۱}{\alpha}$ هستند.

۴ قسمت رنگی، ناحیه‌ای بین دو قطاع است. ابتدا طول کمان‌ها را به دست می‌آوریم. فرض کنیم طول کمان کوچک‌تر L و کمان بزرگ‌تر L' باشد.

$$L = r.\alpha \Rightarrow L = ۲\alpha \, , \, L' = r\alpha$$

$$\text{محیط رنگی} = ۲\alpha + r\alpha + ۲(r-۲)$$
$$\Rightarrow \alpha(r+۲) + ۲(r-۲) = ۱۳ \quad (۱)$$

$$S_{\text{قطاع}} = \frac{۱}{۲}r^۲\alpha \Rightarrow S = \frac{۱}{۲} \times ۲^۲\alpha = ۲\alpha \quad , \quad S'_{\text{قطاع}} = \frac{۱}{۲} \times r^۲\alpha = \frac{۱}{۲}r^۲\alpha$$

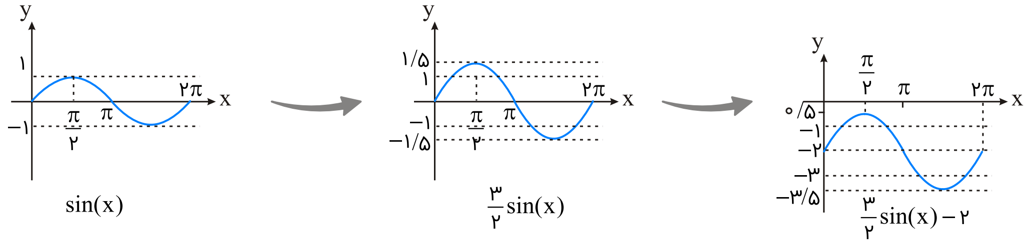
$$S_{\text{رنگی}} = \frac{۱}{۲}r^۲\alpha - ۲\alpha = ۱۰/۵ \xrightarrow{\times ۲} r^۲\alpha - ۴\alpha = ۲۱$$
$$\Rightarrow \alpha = \frac{۲۱}{r^۲ - ۴} \quad (۲)$$

$$(۱),(۲) \Rightarrow \frac{۲۱(r+۲)}{(r-۲)(r+۲)} + ۲(r-۲) = ۱۳$$
$$\Rightarrow ۲(r-۲)^۲ - ۱۳(r-۲) + ۲۱ = ۰$$

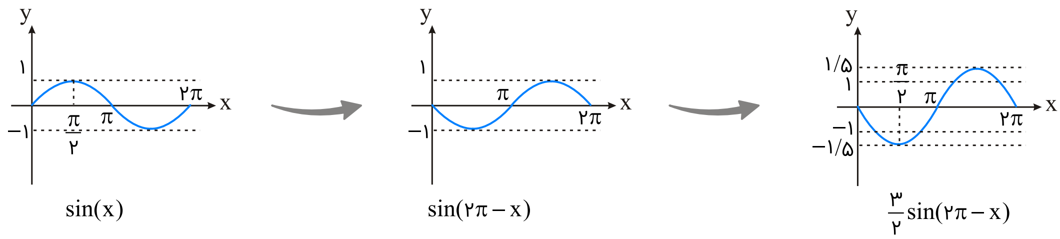
$$r - ۲ = \frac{۷}{۲} \Rightarrow r = ۵/۵ \xrightarrow{(۲)} \alpha = \frac{۲۱}{۲۶/۲۵} = ۰/۸$$

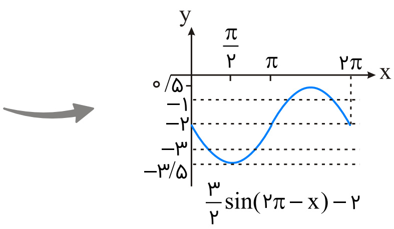
$$r - ۲ = ۳ \Rightarrow r = ۵ \xrightarrow{(۲)} \alpha = ۱$$

۵ نمودار تابع $f(x)=\frac{۳}{۲}\sin x-۲$ به صورت زیر است:

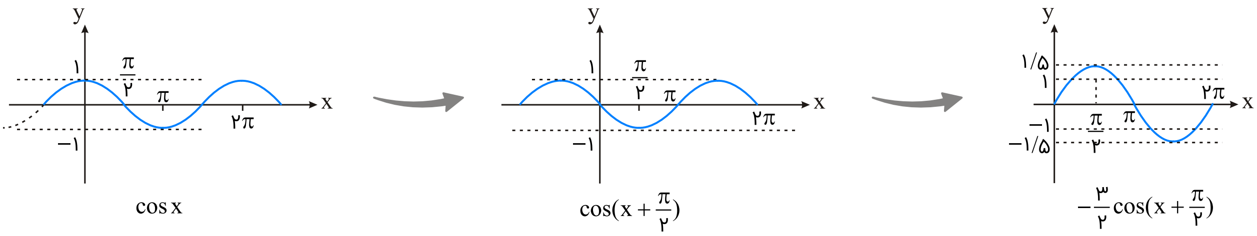


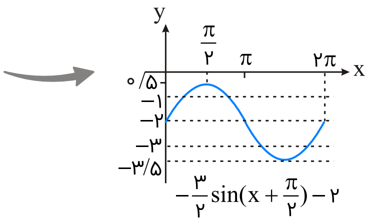
ازطرفی نمودار تابع $g(x)$ به صورت زیر است:





و نمودار $h(x)$ به صورت زیر است:





همانطور که از نمودارها مشخص است، نمودار $f(x)$ بر $h(x)$ منطبق است.

۶

$$AH^{۲} = BH \times HC \Rightarrow ۳۶ = ۹ \times HC \Rightarrow HC = ۴ \Rightarrow BC = ۱۳$$
$$AC^{۲} = HC \times BC \Rightarrow AC^{۲} = ۴ \times ۱۳ \Rightarrow AC = ۲\sqrt{۱۳}$$

۷

برای اینکه دو نقطه نسبت به یک خط قرینه باشند، باید خط واصل این دو نقطه، بر خط Δ عمود باشد و فاصلهٔ نقاط از خط مذکور برابر باشد.

$$\begin{cases} A(۲\ ,\ ۴) \\ B(۱\ ,\ ۰) \end{cases} \Rightarrow m_{AB} = ۴ \Rightarrow m_{\text{عمود}} = -\frac{۱}{۴}$$

حال وسط پاره‌خط واصل AB را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} A(۲,۴) \\ B(۱,۰) \end{cases} \Rightarrow M_{\text{نقطهٔ وسط}} \left(\frac{۲+۱}{۲}, \frac{۴+۰}{۲}\right) = \left(\frac{۳}{۲}\ ,\ ۲\right)$$

معادلهٔ خط Δ عبارت است از:

$$y - ۲ = -\frac{۱}{۴}\left(x - \frac{۳}{۲}\right) \Rightarrow y = -\frac{۱}{۴}x + \frac{۱۹}{۸} \Rightarrow ۸y + ۲x = ۱۹$$

۸

الف

$$۵x - ۱۲y + ۸ = ۰ \Rightarrow y = \frac{۵}{۱۲}x + \frac{۲}{۳}$$
$$-۱۰x + ۲۴y + ۱۰ = ۰ \Rightarrow y = \frac{۵}{۱۲}x - \frac{۵}{۱۲}$$

چون شیب هر دو خط باهم برابر دو خط باهم موازیند.

ب

فاصلهٔ دو خط را می‌خواهیم، یک نقطه روی یکی از خطوط در نظر گرفته و فاصلهٔ آن را تا خط دیگر محاسبه می‌کنیم، نقطهٔ $(۱,۰)$ را روی خط $-۱۰x + ۲۴y + ۱۰ = ۰$ در نظر می‌گیریم و فاصلهٔ آن را تا خط $۵x - ۱۲y + ۸ = ۰$ محاسبه می‌کنیم:

$$d = \frac{|۵(۱) - ۱۲(۰) + ۸|}{\sqrt{(۵)^{۲} + (-۱۲)^{۲}}} = \frac{۱۳}{\sqrt{۱۶۹}} = \frac{۱}{۲}$$

روش دوم:

فاصلهٔ دو خط موازی از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$$d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^{۲} + b^{۲}}} = \frac{|۸ + ۵|}{\sqrt{(۵)^{۲} + (-۱۲)^{۲}}} = \frac{۱۳}{۲۶} = \frac{۱}{۲}$$

۹

$$۲x^۲ - ۲mx + (m^۲ - m) = ۰ \Rightarrow x^۲ - mx + (\frac{m^۲ - m}{۲}) = ۰$$

$$\Rightarrow \text{حاصل‌ضرب ریشه‌ها} = \frac{c}{a} = ۱ \Rightarrow \frac{m^۲ - m}{۲} = ۱ \Rightarrow m^۲ - m = ۲ \Rightarrow m^۲ - m - ۲ = ۰$$

$$\Rightarrow m = \frac{۱ \pm \sqrt{۹}}{۲} = \frac{۱ \pm ۳}{۲} \Rightarrow \begin{cases} m = ۲ \\ m = -۱ \end{cases}$$

حال هر دو جواب را در معادلهٔ صورت سوال جایگذاری می‌کنیم:

$$\begin{cases} m = ۲ : ۲x^۲ - ۴x + ۲ = ۰ \Rightarrow \Delta = ۰ \quad \text{غ.ق.ق} \\ m = -۱ : ۲x^۲ + ۲x = ۰ \Rightarrow x = -۱, ۰ \quad \text{غ.ق.ق} \end{cases}$$

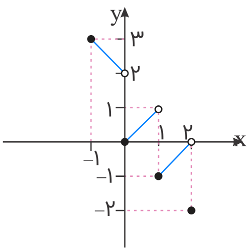
بنابراین مقداری برای m یافت نشد.

پاسخ سؤال ۱۰

۱۰

بازهٔ $-۱ \leq x \leq ۲$ را به بازه‌هایی به‌طول یک تقسیم‌بندی می‌کنیم:

$$-۱ \leq x < ۰ \Rightarrow y = -x - ۲(-۱) \Rightarrow y = -x + ۲$$
$$۰ \leq x < ۱ \Rightarrow y = x - ۲(۰) \Rightarrow y = x$$
$$۱ \leq x < ۲ \Rightarrow y = x - ۲(۱) \Rightarrow y = x - ۲$$
$$x = ۲ \Rightarrow y = ۲ - ۲(۲) = -۲$$



۱۱

با فرض $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = k$، داریم:

$$a = bk \,,\, c = dk \,,\, e = fk$$

$$\frac{a^۲ + c^۲ + e^۲}{ab + cd + ef} = \frac{(bk)^۲ + (dk)^۲ + (fk)^۲}{(bk)b + (dk)d + (fk)f}$$

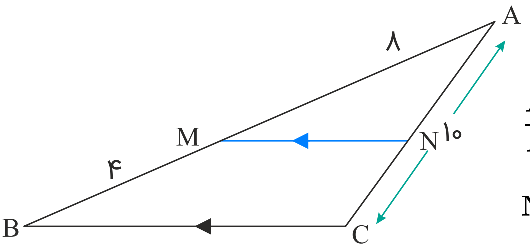
$$= \frac{b^۲k^۲ + d^۲k^۲ + f^۲k^۲}{b^۲k + d^۲k + f^۲k} = \frac{(b^۲ + d^۲ + f^۲)k^۲}{(b^۲ + d^۲ + f^۲)k} = k \quad (*)$$

$$\frac{ab + cd + ef}{b^۲ + d^۲ + f^۲} = \frac{(bk)b + (dk)d + (fk)f}{b^۲ + d^۲ + f^۲}$$

$$= \frac{b^۲k + d^۲k + f^۲k}{b^۲ + d^۲ + f^۲} = \frac{(b^۲ + d^۲ + f^۲)k}{(b^۲ + d^۲ + f^۲)} = k \quad (**)$$

$$(*) \,,\, (**) \Rightarrow \frac{a^۲ + c^۲ + e^۲}{ab + cd + ef} = \frac{ab + cd + ef}{b^۲ + d^۲ + f^۲}$$

۱۲



چون $MN \parallel BC$، طبق قضیهٔ تالس داریم:

$$\frac{AN}{AC} = \frac{AM}{AB} \Rightarrow \frac{AN}{۱۰} = \frac{۸}{۱۲} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow AN = \frac{۲۰}{۳}$$

$$NC = AC - AN = ۱۰ - \frac{۲۰}{۳} = \frac{۱۰}{۳}$$

۱۳

$$\frac{۱}{۱+\cot^۲\alpha} = \frac{۱}{۱+\dfrac{\cos^۲\alpha}{\sin^۲\alpha}} = \frac{\sin^۲\alpha}{\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha} = \sin^۲\alpha$$

$$\Rightarrow \text{عبارت} = \sin^۲۱^\circ + \sin^۲۲^\circ + \sin^۲۳^\circ + ... + \sin^۲۸۹^\circ$$

$$\sin\alpha = \cos(\frac{\pi}{۲}-\alpha) \Rightarrow \sin^۲۱^\circ + \sin^۲۲^\circ + ... + \sin^۲۴۴^\circ + \sin^۲۴۵^\circ + \cos^۲۴۴^\circ + \cos^۲۴۳^\circ + ... + \cos^۲۱^\circ$$

$$= (\sin^۲۱^\circ + \cos^۲۱^\circ) + (\sin^۲۲^\circ + \cos^۲۲^\circ) + ... + (\sin^۲۴۴^\circ + \cos^۲۴۴^\circ) + \sin^۲۴۵^\circ$$

$$= ۱+۱+...+۱+(\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲ = (۴۴\times ۱) + \frac{۱}{۲} = ۴۴ + \frac{۱}{۲} = \frac{۸۹}{۲}$$

۱۴

ابتدا تابع $f + \frac{۱}{f}$ را تعیین می‌کنیم:

$$(۲,۱) \in f \Rightarrow f + \frac{۱}{f} = (۲, ۱+\frac{۱}{۱}) = (۲,۲)$$

$$(۳,۴) \in f \Rightarrow f + \frac{۱}{f} = (۳, ۴+\frac{۱}{۴}) = (۳, \frac{۱۷}{۴})$$

$$(۰,۲) \in f \Rightarrow f + \frac{۱}{f} = (۰, ۲+\frac{۱}{۲}) = (۰, \frac{۵}{۲})$$

$$\Rightarrow f + \frac{۱}{f} = \{(۲,۲), (۳,\frac{۱۷}{۴}), (۰,\frac{۵}{۲})\}$$

برای محاسبهٔ $f + f^{-۱}$ ابتدا $f^{-۱}$ را به دست می‌آوریم که به‌صورت $f^{-۱} = \{(۱,۲),(۴,۳),(۲,۰)\}$ است. برای جمع دو تابع f و $f^{-۱}$ لازم است زوج‌های مرتب با دامنهٔ یکسان باهم در نظر گرفته شوند؛ پس:

$$\begin{matrix}(۲,۱)\in f \\ (۲,۰)\in f^{-۱}\end{matrix} \Rightarrow f + f^{-۱} = (۲, ۱+۰) = (۲,۱) \Rightarrow f + f^{-۱} = \{(۲,۱)\}$$

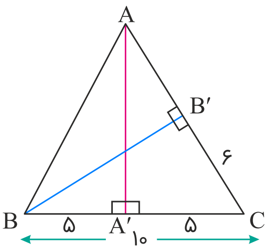
۱۵

$$\begin{cases} \alpha+\beta = -\dfrac{b}{a} \\ \dfrac{\alpha-۱}{\beta} = ۴ \Rightarrow \alpha - ۱ = ۴\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha+\beta = \dfrac{m}{۲} \\ \alpha = ۴\beta+۱ \end{cases} \Rightarrow ۵\beta = \frac{m}{۲} - ۱ \Rightarrow \beta = \frac{m-۲}{۱۰}, \alpha = \frac{m}{۲} - \frac{m-۲}{۱۰} = \frac{۴m+۲}{۱۰}$$

$$\alpha\beta = \frac{c}{a} \Rightarrow \alpha\beta = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{m-۲}{۱۰} \times \frac{۴m+۲}{۱۰} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow ۲m^۲ - ۳m - ۲ = ۲۵$$

$$\Rightarrow ۲m^۲ - ۳m - ۲۷ = ۰ \Rightarrow m = \frac{۳ \pm \sqrt{۹+۲۱۶}}{۴} = \frac{۳\pm ۱۵}{۴} \Rightarrow m = -۳, m = \frac{۱۸}{۴} = \frac{۹}{۲}$$

۱۶ طبق فرض، طول ارتفاع وارد بر ساق، ۸ واحد است. حال:



$$\overset{\Delta}{BB'C}: \text{فیثاغورس} \Rightarrow BB'^{۲} + B'C^{۲} = BC^{۲}$$

$$\xrightarrow[BC=۱۰]{BB'=۸} ۶۴ + B'C^{۲} = ۱۰۰ \Rightarrow B'C^{۲} = ۳۶ \Rightarrow B'C = ۶$$

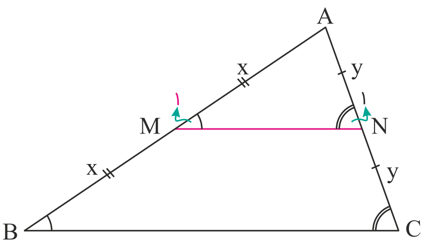
$$\hat{C} = \hat{C}\,, \hat{B}' = \hat{A}' = ۹۰^\circ \Rightarrow C\overset{\Delta}{B'}B \sim C\overset{\Delta}{A'}A$$

$$\Rightarrow \frac{AA'}{BB'} = \frac{A'C}{B'C} \Rightarrow \frac{AA'}{۸} = \frac{۵}{۶} \Rightarrow AA' = \frac{۴۰}{۶} = \frac{۲۰}{۳}$$

۱۷ از روی نمودار مشخص است که $D_f = [-۲,۲]$ و $D_g = [-۱,۲]$ است. برای تعیین دامنهٔ تابع $\sqrt{f} + \frac{۱}{g}$ لازم است اشتراک دامنهٔ توابع f و g به‌نوعی انتخاب شود که در آن فاصله، f مقداری مثبت باشد و g صفر نشود.

فاصله‌ای که f در آن مثبت است برابر با $[۰,۲]$ و نقاطی که g در آن صفر می‌شود، $x = ۰$ و $x = ۲$ است؛ پس: $D_{\sqrt{f}+\frac{۱}{g}} = (۰,۲)$

۱۸



$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} = ۱ \xrightarrow{\text{عکس تالس}} MN \parallel BC \Rightarrow \hat{M}_۱ = \hat{B}, \hat{N}_۱ = \hat{C} \Rightarrow A\overset{\Delta}{M}N \sim A\overset{\Delta}{B}C$$

$$\Rightarrow \frac{S_{A\overset{\Delta}{M}N}}{S_{A\overset{\Delta}{B}C}} = \left(\frac{AM}{AB}\right)^{۲} = \left(\frac{۱}{۲}\right)^{۲} = \frac{۱}{۴}\ (*)$$

$$S_{A\overset{\Delta}{M}N} = S \xrightarrow{(*)} S_{A\overset{\Delta}{B}C} = ۴S \Rightarrow S_{MNCB} = ۴S - S = ۳S \Rightarrow \frac{S_{A\overset{\Delta}{M}N}}{S_{MNCB}} = \frac{S}{۳S} = \frac{۱}{۳}$$

۱۹ چون α یکی از ریشه‌های معادلهٔ داده‌شده است، پس در معادله صدق می‌کند.

$$\alpha^{۳} - ۷\alpha + ۴ = ۰ \Rightarrow \alpha^{۳} - ۷\alpha = -۴$$

$$-\frac{۴}{\alpha} - \alpha^{۲} = \frac{\alpha^{۳} - ۷\alpha}{\alpha} - \alpha^{۲} = \alpha^{۲} - ۷ - \alpha^{۲} = -۷$$