۱

$$A=\tan(-\frac{\pi}{6}).\sin(-\frac{\pi}{3})-\cot(-\frac{\pi}{6})=-\tan\frac{\pi}{6}\times(-\sin\frac{\pi}{3})-(-\cot\frac{\pi}{6})$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3}=\frac{1}{2}+\sqrt{3}$$

۲

$$f(2)=a=\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2[x]-8}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2^+}\frac{2x^2-8}{x-2}=2\lim_{x\to 2^+}\frac{\overset{(x+2)}{\cancel{x^2-4}}}{\cancel{x-2}}=2\times 4=8$$

۳

احتمال برخورد موشک به هدف برابر با $\frac{3}{5}=\frac{6}{10}$ است، بنابراین احتمال اینکه موشک به هدف برخورد نکند برابر با $\frac{2}{5}$ می‌باشد.

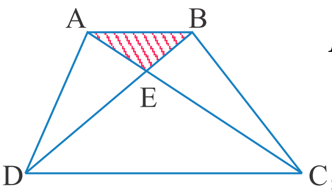
P(لااقل یک موشک به هدف برخورد کند) $=1-P$(هیچ موشکی به هدف برخورد نکند)

بنابراین داریم:

$$1-(\frac{2}{5})^n>\%95\Rightarrow(\frac{2}{5})^n<\frac{5}{100}\Rightarrow(0/4)^n<0/05\Rightarrow n\geq 4$$

۴

محل برخورد قطرها را E می‌نامیم:



$$\overset{\Delta}{ABE}\sim\overset{\Delta}{DCE}\Rightarrow\frac{S_{\overset{\Delta}{DCE}}}{S_{\overset{\Delta}{ABE}}}=3^2=9$$

همچنین $\overset{\Delta}{ADE}$ و $\overset{\Delta}{ABE}$ مثلث‌هایی هم‌ارتفاع هستند؛ پس نسبت مساحتشان برابر نسبت قاعده‌شان است.

$$\frac{S_{\overset{\Delta}{ADE}}}{S_{\overset{\Delta}{ABE}}}=\frac{DE}{BE}=3$$

همین‌طور برای $\overset{\Delta}{BCE}$ داریم:

$$\frac{S_{\overset{\Delta}{BCE}}}{S_{\overset{\Delta}{ABE}}}=3$$

$$\Rightarrow S_{ABCD}=S_{\overset{\Delta}{ABE}}+S_{\overset{\Delta}{BCE}}+S_{\overset{\Delta}{ADE}}+S_{\overset{\Delta}{DCE}}=16S_{\overset{\Delta}{ABE}}$$

۵ با فرض $۲x^۲ - ۴x - ۳ = t$، داریم:

$$۲x^۲ - ۴x = t + ۳$$

معادلهٔ اولیه را کمی ساده‌تر می‌نویسیم:

$$\sqrt{۴x^۲ - ۸x - ۳} = ۲x^۲ - ۴x - ۳ \Rightarrow \sqrt{۲(۲x^۲ - ۴x) - ۳} = ۲x^۲ - ۴x - ۳$$

حال به جای $۲x^۲ - ۴x$، عبارت $t + ۳$ را قرار می‌دهیم:

$$\sqrt{۲(t + ۳) - ۳} = t \Rightarrow \sqrt{۲t + ۳} = t$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} t^۲ - ۲t - ۳ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} t = -۱ \ \times \\ t = ۳ \ \checkmark \end{cases}$$

دقت کنید $t = -۱$ در معادله صدق نمی‌کرد.

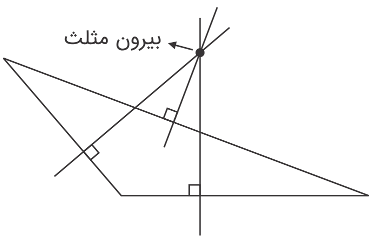
حال عبارتی که t گرفته بودیم را برابر با ۳ قرار می‌دهیم:

$$۲x^۲ - ۴x - ۳ = ۳ \Rightarrow ۲x^۲ - ۴x - ۶ = ۰$$

$$\xrightarrow{\times \frac{۱}{۲}} x^۲ - ۲x - ۳ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = -۱ \\ x = ۳ \end{cases}$$

پاسخ سؤالات ۶ تا ۷

۶ نادرست؛ مثال نقض



۷ نادرست؛ مثال نقض: مثلثی با زوایای ۱۵۰°، ۱۵° و ۱۵°.

۸ ابتدا سمت چپ تساوی مخرج‌مشترک می‌گیریم:

$$\frac{x^۲ - (x - ۱)(x - ۱)}{x^۲ - ۱} = ۲x - ۱$$

$$\frac{\cancel{۲x - ۱}}{x^۲ - ۱} = \cancel{۲x - ۱}$$

$$x^۲ - ۱ = ۱ \Rightarrow x = \pm\sqrt{۲}$$

$$۲x - ۱ = ۰ \Rightarrow x = \frac{۱}{۲}$$

پس معادلهٔ فوق سه جواب دارد: $\{\pm\sqrt{۲}, \frac{۱}{۲}\}$

۹ در دایرهٔ $C(O, r)$ هر نقطه که فاصلهٔ آن از نقطهٔ O کمتر از r باشد درون دایره قرار دارد و هر نقطه که درون دایره قرار داشته باشد فاصلهٔ آن از نقطهٔ O کمتر از r است.
در دایرهٔ $C(O, r)$ هر نقطه که فاصلهٔ آن از نقطهٔ O بیشتر از r باشد بیرون دایره قرار دارد و هر نقطه که بیرون دایره قرار داشته باشد فاصلهٔ آن از نقطهٔ O بیشتر از r است.

۱۰

$$\begin{cases} f(\frac{\pi}{۲}) = ۱ \Rightarrow a - b = ۱ \\ f(\frac{\pi}{۶}) = ۰ \Rightarrow \frac{a}{۲} - b = ۰ \end{cases} \Rightarrow a = ۲ \ , \ b = ۱$$

۱۱

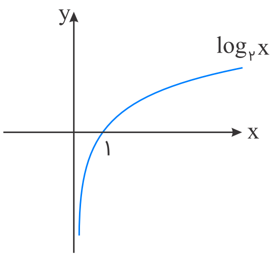
$۱۵۷^\circ = ۱۸۰^\circ - ۲۳^\circ \qquad ۱۱۳^\circ = ۹۰^\circ + ۲۳^\circ$

$۲۹۳^\circ = ۳۶۰^\circ - ۶۷^\circ \qquad ۶۷^\circ = ۹۰^\circ - ۲۳^\circ$

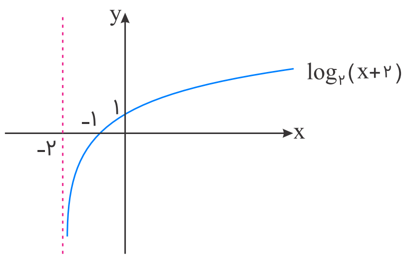
$$\frac{۳\sin ۱۵۷^\circ + ۲\cos ۱۱۳^\circ}{\sin ۲۹۳^\circ - \cos ۶۷^\circ} = \frac{۳\sin ۲۳^\circ - ۲\sin ۲۳^\circ}{-\sin(۶۷^\circ) - \sin ۲۳^\circ} = \frac{۳\sin ۲۳^\circ - ۲\sin ۲۳^\circ}{-\cos ۲۳^\circ - \sin ۲۳^\circ}$$

$$= \frac{\sin ۲۳^\circ}{-\cos ۲۳^\circ - \sin ۲۳^\circ} = -\frac{\tan ۲۳^\circ}{۱+\tan ۲۳^\circ} = -\frac{۰/۴}{۱/۴} = -\frac{۲}{۷}$$

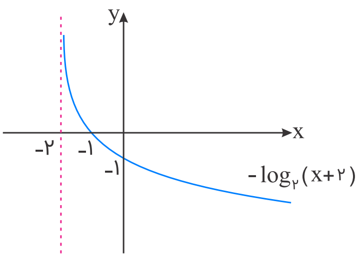
۱۲



(I)



(II)



(III)

۱۳

معادلهٔ داده‌شده به فرم $t+\frac{۱}{t}=۲$ است. می‌دانیم $x+\frac{۱}{x}=۲$ وقتی اتفاق می‌افتد که فقط $x=۱$ باشد:

$$\Rightarrow \frac{x^۲+۶x-۵}{x^۲+۲x-۲}=۱ \Rightarrow \cancel{x^۲}+۶x-۵=\cancel{x^۲}+۲x-۲$$

$$\Rightarrow ۴x=۳ \Rightarrow x=\frac{۳}{۴}$$

پس $x=\frac{۳}{۴}$، ریشهٔ معادلهٔ داده‌شده است.

۱۴

ریشه‌های معادلهٔ اولیه را α و β می‌گیریم و داریم:

$$\begin{cases} \alpha+\beta=-\frac{b}{a}=۶ \\ \alpha\beta=\frac{c}{a}=۳ \end{cases}$$

می‌خواهیم معادله‌ای بنویسیم که ریشه‌هایش $\alpha^۳$ و $\beta^۳$ باشند. مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های جدید را حساب می‌کنیم:

$$S_{\text{جدید}}=\alpha^۳+\beta^۳=(\alpha+\beta)^۳-۳\alpha\beta(\alpha+\beta)=۶^۳-۳(۳)(۶)=۲۱۶-۵۴=۱۶۲$$

$$P_{\text{جدید}}=\alpha^۳\beta^۳=(\alpha\beta)^۳=۳^۳=۲۷$$

با جایگذاری S و P در معادلهٔ $x^۲-Sx+P=۰$، معادلهٔ جدید به‌صورت $x^۲-۱۶۲x+۲۷=۰$ درمی‌آید.

۱۵

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt[۳]{۱+۵x}-۱}{x}=\frac{۰}{۰}$$

$$\sqrt[۳]{۱+۵x}=t \Rightarrow \frac{t^۳-۱}{۵}=x$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt[۳]{۱+۵x}-۱}{x}=\lim_{t\to ۱}\frac{t-۱}{\frac{t^۳-۱}{۵}}=۵\lim_{t\to ۱}\frac{\cancel{t-۱}}{\cancel{(t-۱)}(t^۲+t+۱)}=\frac{۵}{۳}$$

۱۶ اگر $m^۲$، $\alpha+\beta$ و $\alpha\beta$ تشکیل دنبالهٔ حسابی دهند، باید داشته باشیم:

$$۲(\alpha+\beta)=\alpha\beta+m^۲$$

ازطرفی داریم: $P=۹$ و $S=\frac{۲۵}{۲}$

$$\Rightarrow ۲(\frac{۲۵}{۲})=۹+m^۲\Rightarrow m^۲=۱۶\Rightarrow m=\pm ۴$$

۱۷

خط شمارهٔ ۳ $x=۴$

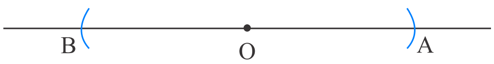
خط شمارهٔ ۲ $y=x$

خط شمارهٔ ۱ $y=-x$

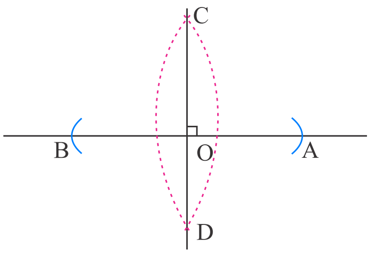
خط شمارهٔ ۴ $y=-۲$

۱۸ الف) ابتدا خطی راست با خط‌کش رسم می‌کنیم:

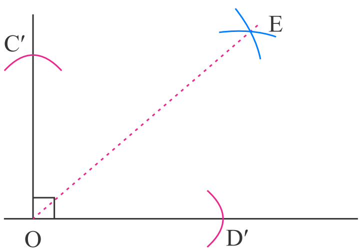
ب) سپس سوزن پرگار را روی خط قرار داده و آن نقطه را O می‌نامیم و دو کمان در دو طرف خط زده، بنابراین پاره‌خط AB تشکیل می‌شود.



پ) حال عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم کرده که برای رسم آن ابتدا دو کمان با اندازهٔ برابر از نقطهٔ A و B زده و محل برخورد دو کمان را به یکدیگر وصل می‌کنیم. اکنون زاویهٔ $A\hat{O}C$ برابر ۹۰° خواهد بود.



ت) حال نیمساز زاویهٔ AOC را رسم می‌کنیم. برای این کار ابتدا پرگار را به‌اندازهٔ دلخواه باز کرده و کمانی بر خط OA و OC می‌زنیم.
سپس کمان را به‌اندازهٔ دلخواه باز کرده و کمانی از D' و C' زده و محل برخورد آن دو کمان را E می‌نامیم.
پس از آن خط OE را رسم می‌کنیم که همان نیمساز زاویهٔ AOC است. بنابراین $E\hat{O}A$ برابر ۴۵° می‌باشد.



۱۹ مختصات نقطهٔ وسط پاره‌خط AB برابر است با:

$$M(\frac{x_A+x_B}{۲},\frac{y_A+y_B}{۲})$$

۲۰

$$[x]-۲=۰\Rightarrow [x]=۲\Rightarrow ۲\leq x<۳\Rightarrow D=\mathbb{R}-[۲,۳)$$

۲۱

نکته: می‌دانیم: $\log_{b^n}^{a^m} = \frac{m}{n}\log_b^a$

پس:

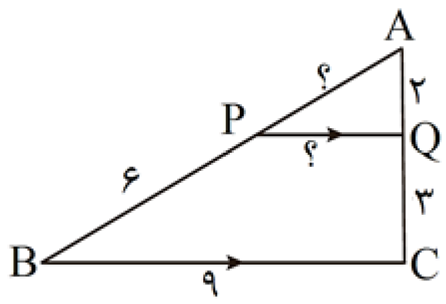
$$\log_{(۷-۴\sqrt{۳})}^{(۷+۴\sqrt{۳})} = \log_{(۲-\sqrt{۳})^۲}^{(۲+\sqrt{۳})^۲} = \log_{۲-\sqrt{۳}}^{۲+\sqrt{۳}} = \log_{(۲+\sqrt{۳})^{-۱}}^{(۲+\sqrt{۳})} = -۱$$

نکته: $۲-\sqrt{۳} = ۲-\sqrt{۳}\times\frac{۲+\sqrt{۳}}{۲+\sqrt{۳}} = \frac{۱}{۲+\sqrt{۳}} = (۲+\sqrt{۳})^{-۱}$

۲۲

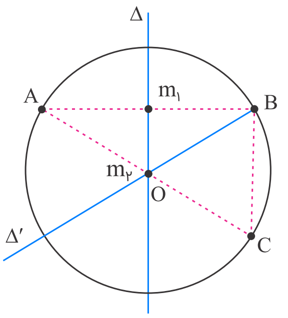
$PQ \parallel BC \Rightarrow$ طبق قضیه تالس : $\frac{AP}{BP} = \frac{AQ}{QC} \Rightarrow \frac{AP}{۶} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow AP = \frac{۶\times ۲}{۳} \Rightarrow AP = ۴$

$PQ \parallel BC \Rightarrow$ طبق قضیه تالس : $\frac{AQ}{AC} = \frac{PQ}{BC} \Rightarrow \frac{۲}{۲+۳} = \frac{PQ}{۹} \Rightarrow PQ = \frac{۹\times ۲}{۵} \Rightarrow PQ = \frac{۱۸}{۵}$



۲۳

محل برخورد عمودمنصف وترها، مرکز دایره است.



$$m_۱\left(\frac{x_A+x_B}{۲},\frac{y_A+y_B}{۲}\right) = \left(-\frac{۱}{۲},\frac{۷}{۲}\right)$$

حال شیب خط Δ را به دست می‌آوریم:

$$m_{AB} = \frac{۴-۳}{۳-(-۴)} = \frac{۱}{۷} \Rightarrow m_\Delta = -۷$$

$$\text{معادلهٔ خط } \Delta : y-\frac{۷}{۲} = -۷\left(x-\left(-\frac{۱}{۲}\right)\right)$$

$$y-\cancel{\frac{۷}{۲}} = -۷x-\cancel{\frac{۷}{۲}} \Rightarrow y = -۷x \quad (I)$$

به همین صورت معادلهٔ عمودمنصف خط AC را نیز به دست می‌آوریم:

$$m_{AC} = \frac{۴-۵}{۳-۰} = -\frac{۱}{۳} \Rightarrow m_{\Delta'} = ۳$$

$$m_۲\left(\frac{۳}{۲},\frac{۹}{۲}\right)$$

$$\text{معادلهٔ خط } \Delta' : y-\frac{۹}{۲} = ۳\left(x-\frac{۳}{۲}\right) \Rightarrow y = ۳x \quad (II)$$

$$\xrightarrow{(I),(II)} x=۰, y=۰ \Rightarrow \text{مرکز } O(۰,۰)$$

$$\text{شعاع دایره} : |OC| = \sqrt{(۰-۰)^۲+(۵-۰)^۲} = ۵$$

پاسخ سؤالات ۲۴ تا ۲۶

۲۴ ۴

$$f(۲)=۰\Rightarrow ۸-۴k+۸=۰\Rightarrow k=۴$$

۲۵ ۳

$$x=-\frac{b}{۲a}=-\frac{۴}{-۴}=۱\Rightarrow \max=f(۱)=-۲+۴+۱=۳$$

۲۶

-۶

$$f(-۷)=[-۷+\frac{۳}{۲}]=-۷+[\frac{۳}{۲}]=-۷+۱=-۶$$

۲۷ $۱<\sqrt{۰/۷}<۰$ است، پس هرچه توان بیشتر باشد مقدار کمتر می‌شود.

$$\sqrt{۲}\overset{?}{\bigcirc}\sqrt[۳]{۳}\xrightarrow{\text{توان ۶}}۸<۹$$

پس: $\sqrt[۳]{۳}>\sqrt{۲}$

$$\sqrt{۲}\overset{?}{\bigcirc}\sqrt[۵]{۵}\xrightarrow{\text{توان ۱۰}}۳۲>۲۵$$

پس: $\sqrt[۵]{۵}<\sqrt{۲}$

$$\sqrt[۵]{۵}<\sqrt{۲}<\sqrt[۳]{۳}$$

بنابراین:

$$\sqrt{۰/۷}^{\sqrt[۵]{۵}}>\sqrt{۰/۷}^{\sqrt{۲}}>\sqrt{۰/۷}^{\sqrt[۳]{۳}}$$

۲۸ برای اینکه معادلهٔ فوق یک ریشه داشته باشد، باید پس از تغییر متغیر، یک ریشهٔ مثبت و یک ریشهٔ منفی به دست بیاید؛ پس باید $\Delta>۰$ و ضرب ریشه‌ها $\frac{c}{a}<۰$ باشد.

$$\sqrt{x}=t$$
$$(۱-m)t^۲-t+(m-۲)=۰$$
$$\Delta>۰\Rightarrow ۱-۴(۱-m)(m-۲)>۰\Rightarrow (۲m-۳)^۲>۰\Rightarrow m\neq\frac{۳}{۲}$$
$$\frac{c}{a}<۰\Rightarrow \frac{m-۲}{۱-m}<۰\Rightarrow \begin{cases} m=۲\\ m=۱\end{cases}$$

	۱		۲	
m-۲	−	−	۰	+
۱-m	+	۰	−	−
$\frac{m-۲}{۱-m}$	−	ت.ن	+ ۰	−

پس $m<۱$ یا $m>۲$ است.

۲۹ دامنهٔ مشترک f و g عبارت است از: $\{۱,-۲,۲\}$

$$\frac{-۲f}{g^۲}(۱)=\frac{-۲f(۱)}{g^۲(۱)}=\frac{-۲\times ۲}{(-۲)^۲}=-۱$$
$$\frac{-۲f}{g^۲}(-۲)=\frac{-۲f(-۲)}{g^۲(-۲)}=\frac{۸}{۴}=۲$$

چون $g(۲)$ برابر صفر است، ۲ در دامنهٔ تابع نیست.

$$\frac{-۲f}{g^۲}=\{(۱,-۱),(-۲,۲)\}$$

۳۰

$$\frac{-۵}{\cos x} > ۰ \Rightarrow \cos x < ۰$$

$$\Rightarrow x \in [\frac{\pi}{۲}, \frac{۳\pi}{۲}] \cup [-\frac{۳\pi}{۲}, -\frac{\pi}{۲}]$$

۳۱

چون فرزند اول و دوم هیچ تأثیری بر فرزند سوم ندارد، پس احتمال آنکه فرزند سوم پسر باشد، $\frac{۱}{۲}$ است.

۳۲

$$\begin{cases} f(x) = \log_b x \\ (۴,۲) \end{cases} \Rightarrow ۲ = \log_b ۴ \Rightarrow b^۲ = ۴ \Rightarrow \begin{cases} b = ۲ & \text{ق.ق} \\ b = -۲ & \text{غ.ق.ق} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \log(b^۵ + ۶۸) = \log(۳۲ + ۶۸) = \log ۱۰۰ = ۲$$

۳۳

دو تابع f و g را برابر می‌نامیم هرگاه:

الف) دامنهٔ f و دامنهٔ g با هم برابر باشند.

ب) برای هر x از این دامنهٔ یکسان داشته باشیم: $f(x) = g(x)$

باتوجه‌به اینکه در صورت سؤال شرط الف، صادق است، فقط شرط ب را چک می‌کنیم:

$$f(x) = (bx - ۱)(ax^۲ + ۲x + ۱) + ۲$$
$$= (abx^۳ + ۲bx^۲ + bx - ax^۲ - ۲x - ۱) + ۲$$

$$\Rightarrow f(x) = abx^۳ + (۲b - a)x^۲ + (b - ۲)x + ۱$$

از طرفی $g(x) = ۸x^۳ + c$ است، پس:

$$f(x) = g(x) \ : \ \begin{cases} ab = ۸ \\ ۲b - a = ۰ \\ b - ۲ = ۰ \\ c = ۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = ۱ \\ b = ۲ \\ a = ۴ \end{cases} \Rightarrow a^۲ + b^۲ + c^۲ = ۲۱$$

۳۴

$$A = \frac{x^۲ - ۴x + ۲}{۲x^۲ - ۸x + ۱۳} = \frac{(x-۲)^۲ - ۲}{۲(x-۲)^۲ + ۵}$$

حال $x = \sqrt{۵} + ۲$ را در صورت و مخرج جای‌گذاری می‌کنیم:

$$A = \frac{(\sqrt{۵} + ۲ - ۲)^۲ - ۲}{۲(\sqrt{۵} + ۲ - ۲)^۲ + ۵} = \frac{۳}{۱۵} = \frac{۱}{۵}$$

۳۵

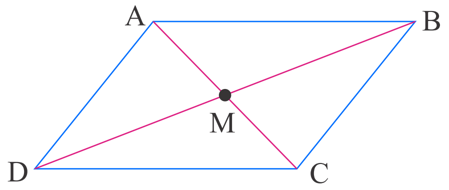
B: مجموع سه عدد روشده برابر با ۱۵ باشد.

A: هر سه عدد روشده یکسان باشند.

$$\text{مجموع ۱۵} : \begin{cases} (۵,۵,۵) \Rightarrow ۱ \\ (۶,۵,۴) \Rightarrow ۳! = ۶ \\ (۶,۶,۳) \Rightarrow ۳ \end{cases}$$

$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} \Rightarrow P(A|B) = \frac{۱}{۱ + ۶ + ۳} = \frac{۱}{۱۰}$$

۳۶ از آنجایی‌که قطرهای متوازی‌الاضلاع، منصف یکدیگرند، داریم:

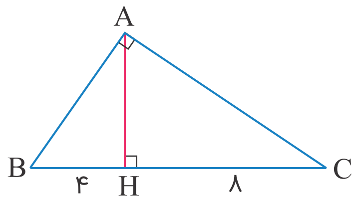


$$\left.\begin{array}{l} \text{است } AC \text{ وسط } M \Rightarrow M = \dfrac{A+C}{۲} \\ \text{است } BD \text{ وسط } M \Rightarrow M = \dfrac{B+D}{۲} \end{array}\right\} \Rightarrow A + C = B + D$$

$$\Rightarrow D = A + C - B \Rightarrow \begin{cases} x_D = x_A + x_C - x_B = -۱ + ۷ - ۵ = ۱ \\ y_D = y_A + y_C - y_B = ۴ + ۱ - (-۳) = ۸ \end{cases}$$

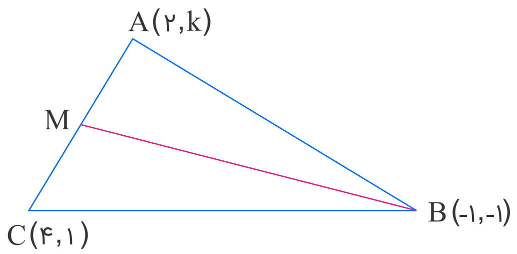
بنابراین، $D = (۱, ۸)$ است.

۳۷



$$AC^۲ = CH.BC \Rightarrow AC^۲ = ۸ \times ۱۲ \Rightarrow AC = ۴\sqrt{۶}$$

۳۸ شکل فرضی زیر را در نظر می‌گیریم:



مختصات M را حساب می‌کنیم:

$$M=(۳,\frac{k+۱}{۲})$$

فاصلهٔ B تا M باید برابر با ۵ باشد:

$$BM=۵\Rightarrow\sqrt{(۳+۱)^۲+(\frac{k+۱}{۲}+۱)^۲}=۵$$
$$\Rightarrow ۱۶+(\frac{k+۳}{۲})^۲=۲۵\Rightarrow\begin{cases}\frac{k+۳}{۲}=۳\Rightarrow k=۳\\ \frac{k+۳}{۲}=-۳\Rightarrow k=-۹\end{cases}$$

۳۹

$$\lim_{x\to ۳^+}\frac{(۲-[x])\sqrt{x^۲-۶x+۹}}{x^۲-۹}=\lim_{x\to ۳^+}\frac{-|x-۳|}{x^۲-۹}$$
$$=\lim_{x\to ۳^+}\frac{-\cancel{(x-۳)}}{\cancel{(x-۳)}(x+۳)}=-\frac{۱}{۶}$$

۴۰ نکته: می‌دانیم: $\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha$

پس:

$$\tan ۱۷۹=-\tan ۱$$
$$\tan ۱۷۸=-\tan ۲$$
$$\vdots$$
$$\tan ۹۱=-\tan ۸۹$$

درنتیجه:

$$\Rightarrow \tan ۱+\tan ۲+\cdots+\tan ۸۹+\tan ۹۱+\tan ۹۲+\cdots+\tan ۱۷۹=۰$$

۴۱ چون میانگین ۲ دادهٔ اضافه‌شده برابر ۲۰ است، پس میانگین ثابت می‌باشد.

$$\sigma_۱^۲=\frac{(x_۱-۲۰)^۲+(x_۲-۲۰)^۲+...+(x_۸-۲۰)^۲}{۸}=۹$$
$$\Rightarrow (x_۱-۲۰)^۲+(x_۲-۲۰)^۲+...+(x_۸-۲۰)^۲=۷۲$$
$$\sigma_۲^۲=\frac{(x_۱-۲۰)^۲+(x_۲-۲۰)+....+(x_۸-۲۰)^۲+(۲۹-۲۰)^۲+(۱۱-۲۰)^۲}{۱۰}$$
$$=\frac{۷۲+۸۱+۸۱}{۱۰}=۲۳/۴$$

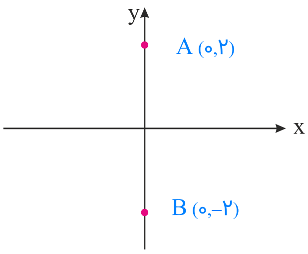
۴۲ برای حل این مسئله، تغییر متغیر $\sqrt{x}=t$ را در نظر می‌گیریم.

$$\sqrt{x}=t \Rightarrow x=t^{۲}$$

$$t^{۲}-t-۶=۰ \Rightarrow (t-۳)(t+۲)=۰ \Rightarrow \begin{cases} t=۳ \Rightarrow \sqrt{x}=۳ \Rightarrow x=۹ \\ t=-۲ \quad \times \end{cases}$$

پس معادلهٔ فوق، یک ریشهٔ مثبت دارد.

۴۳ شکل را در محور مختصات رسم می‌کنیم:



چون رأس C در ناحیهٔ ۳ قرار دارد و همچنین $ABCD$ مربع است، پس: $AB=BC=۴$

درنتیجه مختصات رأس C، $(-۴,-۲)$ است.

همچنین $AB=AD=۴$، بنابراین: $D(-۴,۲)$

تذکر: برای به دست آوردن مختصات نقطهٔ D از راه‌حل زیر نیز می‌توانستیم استفاده کنیم:

$$\begin{cases} x_A+x_C=x_B+x_D \Rightarrow ۰+(-۴)=۰+x_D \Rightarrow x_D=-۴ \\ y_A+y_C=y_B+y_D \Rightarrow ۲+(-۲)=-۲+y_D \Rightarrow y_D=۲ \end{cases}$$

۴۴

$$P(\text{خسرو})=x \qquad P(\text{کیومرث})=۳x$$

$$P(\text{خسرو یا کیومرث})=x+۳x-۳x^{۲}=\frac{۱۷}{۲۵}$$

$$\Rightarrow ۳x^{۲}-۴x+\frac{۱۷}{۲۵}=۰ \Rightarrow (۳x-\frac{۱۷}{۵})(x-\frac{۱}{۵})=۰ \Rightarrow x=\frac{۱}{۵}$$

۴۵ دو داده‌ای که حذف کرده‌ایم، میانگینشان همان ۱۵ است، پس:

$$\bar{x}_{\text{جدید}}=\bar{x}_{\text{قبلی}}=۱۵$$

$$۳^{۲}=\frac{(x_۱-۱۵)^{۲}+\cdots+(x_۸-۱۵)^{۲}+(۲۱-۱۵)^{۲}+(۹-۱۵)^{۲}}{۱۰}$$

$$\Rightarrow (x_۱-۱۵)^{۲}+\cdots+(x_۸-۱۵)^{۲}=۹۰-۷۲=۱۸$$

$$\sigma^{۲}_{\text{جدید}}=\frac{۱۸}{۸}=\frac{۹}{۴} \Rightarrow \sigma_{\text{جدید}}=\frac{۳}{۲}$$

۴۶

$$\log_{۲}^{(۳-x)(۱-x)}=۳ \Rightarrow ۳-۴x+x^{۲}=۲^{۳} \Rightarrow x^{۲}-۴x-۵=۰$$

$$\Rightarrow (x-۵)(x+۱)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۵ \quad \text{غ ق ق} \\ x=-۱ \quad \text{ق ق} \end{cases}$$

۴۷

الف

$$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$$

ب

$$DE \parallel BC \Rightarrow \frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC} \xrightarrow[\text{در مخرج}]{\text{ترکیب}} \frac{AD}{AD+DB}=\frac{AE}{AE+EC} \Rightarrow \frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$$

پ

$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}\Rightarrow\frac{AD-AB}{AB}=\frac{AE-AC}{AC}$$

$$\Rightarrow\frac{\cancel{-}BD}{AB}=\frac{\cancel{-}EC}{AC}\Rightarrow\frac{BD}{AB}=\frac{EC}{AC}$$

۴۸ در معادلهٔ $ax^۲+bx+c=۰$ داریم: $\alpha+\beta=\frac{-b}{a}$ و $\alpha\beta=\frac{c}{a}$

$$\begin{cases}P=\alpha\beta=\frac{-۵}{۳}\\ S=\alpha+\beta=\frac{۴}{۳}\end{cases}\Rightarrow\frac{۱}{\alpha\beta+\alpha}+\frac{۱}{\beta+\alpha\beta}=\frac{۱}{-\frac{۵}{۳}+\alpha}+\frac{۱}{-\frac{۵}{۳}+\beta}$$

$$=\frac{\beta-\frac{۵}{۳}+\alpha-\frac{۵}{۳}}{\alpha\beta-\frac{۵}{۳}(\alpha+\beta)+\frac{۲۵}{۹}}=\frac{S-\frac{۱۰}{۳}}{P-\frac{۵}{۳}S+\frac{۲۵}{۹}}$$

$$=\frac{\frac{۴}{۳}-\frac{۱۰}{۳}}{-\frac{۵}{۳}-\frac{۵}{۳}\times\frac{۴}{۳}+\frac{۲۵}{۹}}=\frac{-۲}{-\frac{۵}{۳}+\frac{۵}{۹}}$$

$$\Rightarrow\frac{-۲}{-\frac{۱۵}{۹}+\frac{۵}{۹}}=\frac{-۲}{-\frac{۱۰}{۹}}=\frac{۱۸}{۱۰}=\frac{۹}{۵}$$

۴۹ طبق ویژگی‌های لگاریتم می‌دانیم $a^b=c\Rightarrow\log_a^c=b$.

پس:

$$\log_۵^{۵^{\frac{x^۴-x^۳+x-۱}{x^۲-x+۱}}}=۳x+۳\Rightarrow\frac{x^۴-x^۳+x-۱}{x^۲-x+۱}\log_۵^۵=۳x+۳$$

طرفین را به یک طرف منتقل کرده و مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\Rightarrow\frac{x^۳(x-۱)+(x-۱)}{x^۲-x+۱}=۳(x+۱)\Rightarrow\frac{(x-۱)(x^۳+۱)}{x^۲-x+۱}-۳(x+۱)=۰$$

$$\Rightarrow\frac{(x-۱)(x^۳+۱)-۳(x+۱)(x^۲-x+۱)}{x^۲-x+۱}=۰$$

$$\Rightarrow\frac{(x-۱)(x+۱)(x^۲-x+۱)-۳(x+۱)(x^۲-x+۱)}{(x^۲-x+۱)}=۰$$

$$\Rightarrow\frac{(x-۱-۳)(x+۱)(x^۲-x+۱)}{(x^۲-x+۱)}=۰$$

$$\xrightarrow{(x^۲-x+۱):\Delta<۰}\frac{(x-۱-۳)(x+۱)\cancel{(x^۲-x+۱)}}{\cancel{(x^۲-x+۱)}}=۰$$

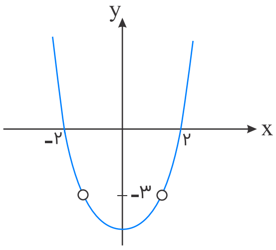
$$\Rightarrow\begin{cases}x+۱=۰\Rightarrow x=-۱\ \text{قق}\\ (x-۴)=۰\Rightarrow x=۴\ \text{قق}\end{cases}$$

پس معادلهٔ فوق دو جواب دارد و هر دو قابل‌قبول است.

۵۰ برای رسم نمودار تابع، ابتدا دامنه را به دست می‌آوریم: $D_f = \mathbb{R} - \{\pm ۱\}$
سپس تابع f را تا آنجا که می‌توانیم ساده می‌کنیم:

$$\Rightarrow f(x) = \frac{x^۴ - ۵x^۲ + ۴}{x^۲ - ۱} = \frac{(x^۲ - ۴)(x^۲ - ۱)}{x^۲ - ۱}$$
$$= x^۲ - ۴ = (x - ۲)(x + ۲)$$

حال تابع درجهٔ ۲، $f(x) = x^۲ - ۴$ را با دامنهٔ $\mathbb{R} - \{\pm ۱\}$ رسم می‌کنیم:



۵۱ **الف** عکس قضیه: اگر در یک چهار ضلعی قطرها یکدیگر را نصف کنند، آنگاه آن چهار ضلعی متوازی‌الاضلاع است.

۵۲

$$f(x) = ax + b$$
$$f(۲x - ۲) = a(۲x - ۲) + b = ۲ax - ۲a + b$$
$$f(۱ - x) = a(۱ - x) + b = -ax + a + b$$
$$f(۲x - ۲) + ۲f(۱ - x) = \cancel{۲ax} - \cancel{۲a} + b - \cancel{۲ax} + \cancel{۲a} + ۲b = ۹$$
$$\Rightarrow ۳b = ۹ \Rightarrow b = ۳$$
$$f(۴) = ۵ \Rightarrow ۴a + b = ۵ \Rightarrow ۴a + ۳ = ۵ \Rightarrow a = \frac{۱}{۲}$$
$$f(x) = \frac{۱}{۲}x + ۳ \Rightarrow f(۱۰) = ۸$$

۵۳

$$\hat{A} = \hat{C} = \hat{B}_۱ \Rightarrow \hat{P}_۱ = \hat{B}$$
$$\left.\begin{array}{l} \hat{P}_۱ = \hat{B} \\ \dfrac{PC}{BC} = \dfrac{PB}{AB} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{دو ضلع متناسب و زاویهٔ بین برابر}} B\overset{\Delta}{P}C \sim A\overset{\Delta}{B}C$$
$$\frac{PC}{BC} = \frac{PB}{AB} = \frac{BC}{AC} \Rightarrow \frac{۸}{x} = \frac{x}{۱۸} \Rightarrow x^۲ = ۸ \times ۱۸ \Rightarrow x = ۱۲$$

پاسخ سؤالات ۵۴ تا ۵۵

۵۴ دو

۵۵ دو

۵۶ نقطه‌ای از نمودار $y=\sqrt{x+۱}$ که کمترین فاصله را از A دارد، $B(\alpha,\sqrt{\alpha+۱})$ در نظر می‌گیریم. حال فاصلهٔ دو نقطهٔ A و B را به دست می‌آوریم:

$$AB=\sqrt{(\alpha-۴)^۲+(\sqrt{\alpha+۱})^۲}=\sqrt{\alpha^۲-۸\alpha+۱۶+\alpha+۱}$$
$$=\sqrt{\alpha^۲-۷\alpha+۱۷}=\sqrt{(\alpha-\frac{۷}{۲})^۲+\frac{۱۹}{۴}}\quad(*)$$

برای اینکه AB کمترین مقدار شود، باید $\alpha=\frac{۷}{۲}$ باشد. بنابراین کمترین فاصله برابر است با:

$$AB=\sqrt{\frac{۱۹}{۴}}=\frac{\sqrt{۱۹}}{۲}$$

۵۷

$$\text{میانگین}=\frac{۴+۵+۹+۱۲+۲۰+a+۱۷}{۷}=۱۰$$
$$\Rightarrow a+۶۷=۷۰\Rightarrow a=۳$$

حال اعداد را به ترتیب از کوچک به بزرگ نوشته و میانه را انتخاب می‌کنیم:

$$۳,۴,۵,\underline{۹},۱۲,۱۷,۲۰$$

درنتیجه، میانه ۹ است.

۵۸ باتوجه‌به اینکه در بازهٔ $(۲,۳)$ تابع $[x]-۲$، تابع ثابت صفر است، پس حد فوق برابر صفر می‌باشد.

۵۹

الف

$$\text{شیب خط } L \text{ گذرا از نقاط } A \text{ و } P: m=\frac{y_P-y_A}{x_P-x_A}=\frac{۳-۴}{۲-۰}=-\frac{۱}{۲}$$
$$\text{شیب خط } \Delta \text{ گذرا از نقاط } B \text{ و } P: m'=\frac{y_P-y_B}{x_P-x_B}=\frac{۳-۱}{۲-۱}=۲$$

ب

$$mm'=(-\frac{۱}{۲})(۲)=-۱$$

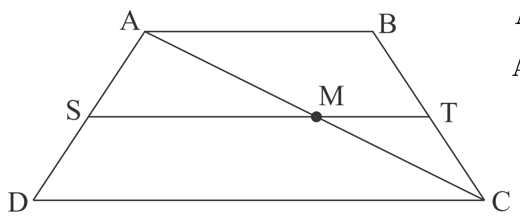
شیب‌ها، قرینهٔ معکوس یکدیگرند.

پ موازی، ۲، معکوس

۶۰ از راه‌حل متمم (هیچ بذری نروید)، احتمال را به دست می‌آوریم:

$$P=۱-۰/۲\times۰/۲\times۰/۲=۱-۰/۰۰۸=۰/۹۹۲$$

۶۱



$$\left.\begin{array}{l}A\overset{\Delta}{D}C:\frac{AS}{SD}=\frac{AM}{MC}\\ A\overset{\Delta}{B}C:\frac{TC}{BT}=\frac{MC}{AM}\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{AS}{SD}=\frac{BT}{TC}$$

۶۲ نکته: برای محاسبهٔ دامنهٔ تابع $\log_{g(x)}^{f(x)}$ باید شرط‌های زیر برقرار باشد:

$$f(x) > 0 \ , \ \ g(x) > 0 \ , \ \ g(x) \neq 1$$

پس داریم:

$$-\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{2} > 0 \Rightarrow -\frac{1}{2}(x^2 - 4x + 3) > 0$$
$$\Rightarrow -\frac{1}{2}(x-3)(x-1) > 0 \Rightarrow D_f = (1, 3)$$

البته زیر رادیکال هم باید مثبت باشد.

$$\log_{\frac{1}{2}}^{(-\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{2})} > 0 \Rightarrow -\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{2} < (\frac{1}{2})^{\circ}$$
$$\Rightarrow -\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{2} < 1 \Rightarrow -\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{5}{2} < 0 \xrightarrow{a<0,\Delta<0} \text{همواره برقرار است}$$

پس دامنهٔ $f(x)$، بازهٔ $(1, 3)$ است.

۶۳

$$AB = |x_A - x_B| = |x_B - x_A|$$
$$CD = |y_C - y_D| = |y_D - y_C|$$

۶۴

$$P(A'|B') = \frac{P(A' \cap B')}{P(B')} = \frac{1 - P(A \cup B)}{1 - P(B)} = \frac{1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4}}{\frac{2}{3}} = \frac{5}{8}$$

۶۵ باتوجه‌به ویژگی تابع جزءصحیح، می‌دانیم: $n \le [x] < n + 1 \ (n \in \mathbb{Z})$، حال:

$$\underbrace{[\sqrt{82}] + [\sqrt{83}] + \cdots + [\sqrt{99}]}_{\text{۱۸ جمله}} + \underbrace{[\sqrt{100}] + [\sqrt{101}] + \cdots + [\sqrt{120}]}_{\text{۲۱ جمله}} + \underbrace{[\sqrt{121}] + [\sqrt{122}]}_{\text{۲ جمله}}$$

$$[\sqrt{82}] = [\sqrt{83}] = \cdots = [\sqrt{99}] = 9 \Rightarrow \underbrace{18}_{\text{جمله}} \times \underbrace{9}_{\text{حاصل}} = 162$$

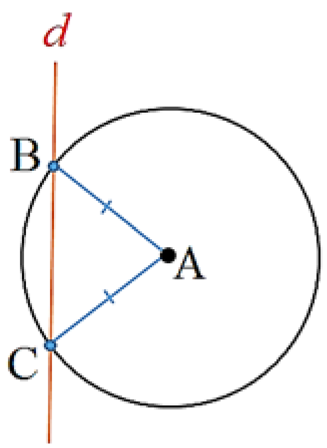
$$[\sqrt{100}] = [\sqrt{101}] = \cdots = [\sqrt{120}] = 10 \Rightarrow 21 \times 10 = 210$$

$$[\sqrt{121}] = [\sqrt{122}] = 11 \Rightarrow 2 \times 11 = 22$$

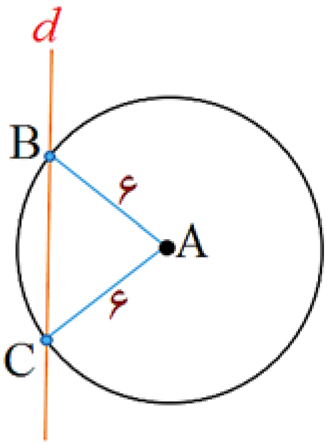
$$\text{حاصلِ کل} = 162 + 210 + 22 = 394$$

۶۶ **الف** دایره‌ای به مرکز A و شعاع r (بیشتر از ۴ باشد) رسم می‌کنیم. محل برخورد این دایره با خط d همان نقاط دیگر رأس‌های مثلث است زیرا:

$$AC = AB = r$$



ب دایره‌ای به مرکز A و شعاع $r = ۶$ رسم می‌کنیم. محل برخورد این دایره با خط d همان نقاط دیگر رأس‌های مثلث است زیرا: $AC = AB = ۶$

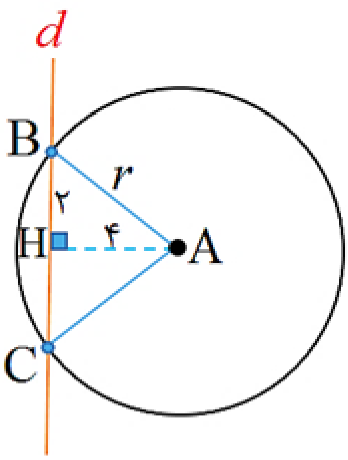


پ چون فاصله عمودی نقطه A از خط d برابر ۴ است و این فاصله همان ارتفاع مثلث است، اگر بخواهیم مساحت این مثلث ۸ سانتی‌متر مربع باشد باید قاعده آن ۴ سانتی‌متر باشد یعنی فاصله دو نقطه B و C روی خط d برابر ۴ باشد، درنتیجه طبق قضیه فیثاغورث داریم:

$$(AB)^۲ = (AH)^۲ + (BH)^۲ \Rightarrow r^۲ = (۴)^۲ + (۲)^۲ = ۱۶ + ۴ = ۲۰ \Rightarrow r = \sqrt{۲۰}$$

بنابراین اگر دایره‌ای به شعاع $\sqrt{۲۰}$ رسم کنیم، محل برخورد این دایره با خط d همان نقاط دیگر رأس‌های مثلث است زیرا: $AC = AB = \sqrt{۲۰}$ این همان مثلثی است که مساحت آن ۸ می‌شود.

$$S_{ABC} = \frac{۱}{۲}(۴)(۴) = ۸$$



۶۷ دو طرف را بر $x^۲$ تقسیم می‌کنیم:

$$x^۴ + ۲x^۳ - x^۲ + ۲x + ۱ = ۰ \Rightarrow x^۲ + ۲x - ۱ + \frac{۲}{x} + \frac{۱}{x^۲} = ۰$$

$$\Rightarrow x^۲ + \frac{۱}{x^۲} + ۲(x + \frac{۱}{x}) - ۱ = ۰$$

$$x + \frac{۱}{x} = t \Rightarrow t^۲ - ۲ + ۲t - ۱ = ۰ \Rightarrow t^۲ + ۲t - ۳ = ۰ \Rightarrow t = ۱ \text{ یا } -۳$$

$$x + \frac{۱}{x} = ۱ \Rightarrow x^۲ + ۱ = x \Rightarrow x^۲ - x + ۱ = ۰ \quad \text{جواب ندارد}$$

$$x + \frac{۱}{x} = -۳ \Rightarrow x^۲ + ۱ = -۳x \Rightarrow x^۲ + ۳x + ۱ = ۰ \Rightarrow x = \frac{-۳ \pm \sqrt{۵}}{۲}$$

۶۸

$$f(x)=\frac{\sqrt{-x^۲+۴x+۵}}{\sqrt{x^۲-۳x+۲}}$$

$$-x^۲+۴x+۵\geq ۰ \Rightarrow -x^۲+۴x+۵=۰ \Rightarrow \begin{cases} x_۱=۵ \\ x_۲=-۱ \end{cases} \Rightarrow [-۱\,,\,۵] \quad (I)$$

$$x^۲-۳x+۲>۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۱ \\ x=۲ \end{cases} \Rightarrow (-\infty\,,\,۱)\cup(۲\,,\,+\infty) \quad (II)$$

$$(I)\ \cap\ (II) \Rightarrow\ [-۱\,,\,۱)\cup(۲\,,\,۵]$$

۶۹

A: فردا به کوه برود.

B: فردا باران بیاید.

$$P(A)=۰/۲$$
$$P(B)=۰/۴$$
$$P(A|B)=۰/۱$$

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)} \Rightarrow ۰/۱=\frac{P(A\cap B)}{۰/۴}$$
$$\Rightarrow P(A\cap B)=۰/۴\times ۰/۱=۰/۰۴$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$
$$=۰/۲+۰/۴-۰/۰۴=۰/۵۶$$