۱

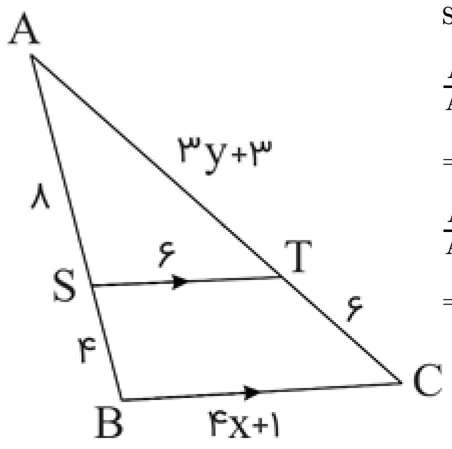
$ST \parallel BC \Rightarrow$ طبق قضیه تالس : $\frac{AS}{AB} = \frac{AT}{AC} = \frac{ST}{BC}$

$\frac{AS}{AB} = \frac{AT}{AC} \Rightarrow \frac{۸}{۱۲} = \frac{۳y+۳}{۳y+۹} \Rightarrow ۲۴y + ۷۲ = ۳۶y + ۳۶$

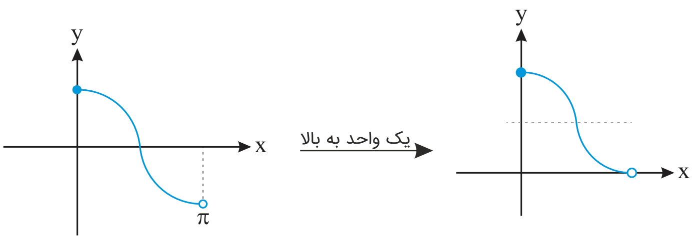
$\Rightarrow ۳۶y - ۲۴y = ۷۲ - ۳۶ \Rightarrow y = \frac{۳۶}{۱۲} \Rightarrow y = ۳$

$\frac{AS}{AB} = \frac{ST}{BC} \Rightarrow \frac{۸}{۱۲} = \frac{۶}{۴x+۱} \Rightarrow ۳۲x + ۸ = ۷۲$

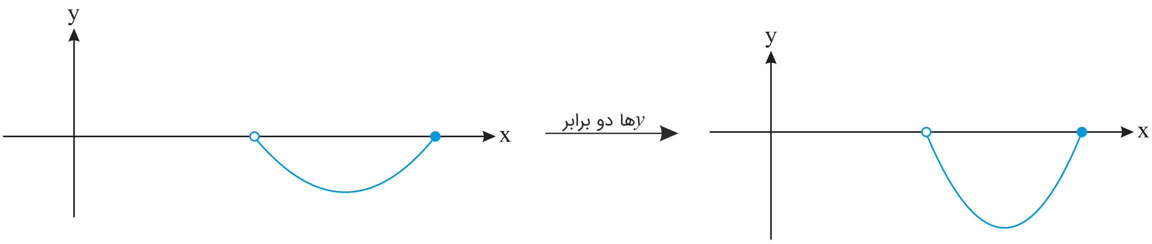
$\Rightarrow ۳۲x = ۷۲ - ۸ \Rightarrow ۳۲x = ۶۴ \Rightarrow x = \frac{۶۴}{۳۲} \Rightarrow x = ۲$

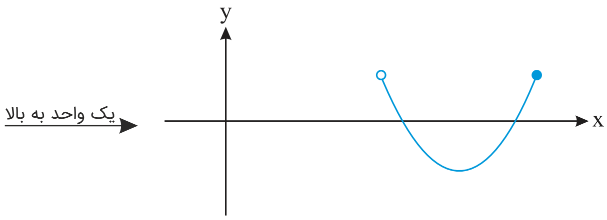


$g(x) = \cos x + ۱ \quad ۰ \leq x < \pi$

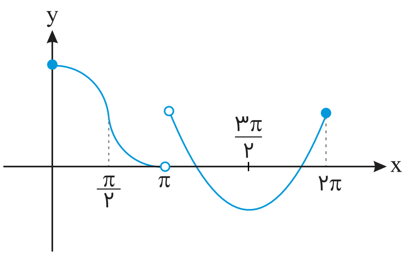


$h(x) = ۲\sin x + ۱ \quad \pi < x \leq ۲\pi$





$$f(x) = \begin{cases} \cos x + ۱ & ; ۰ \leq x < \pi \\ ۲\sin x + ۱ & ; \pi < x \leq ۲\pi \end{cases}$$



۳

نکته: مساحت قطاع دایره به شعاع r و زاویهٔ α رادیان برابر است با:

$$S=\frac{۱}{۲}r^{۲}\alpha$$

$$\frac{۱}{۲}r^{۲}\alpha+\frac{۱}{۲}r^{۲}\beta=\frac{۲۵\pi}{۳}\Rightarrow\frac{۱}{۲}\times ۱۰^{۲}(\alpha+\beta)=\frac{۲۵\pi}{۳}\Rightarrow\alpha+\beta=\frac{\pi}{۶}$$

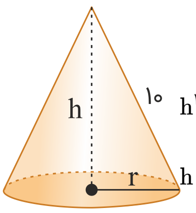
پس قطاع باقی‌مانده دارای زاویهٔ $\pi-\frac{\pi}{۶}$ یعنی $\frac{۵\pi}{۶}$ است.

می‌دانیم در تبدیل قطاع (گستردهٔ مخروط) به شکل فضایی مخروط، شعاع قطاع، مولد مخروط و طول کمان روبه‌روی زاویهٔ قطاع، محیط قاعدهٔ مخروط می‌شود؛ پس:

$$L=۱۰\,,\ \text{طول کمان قطاع}=\text{محیط قاعدهٔ مخروط}$$

$$\Rightarrow ۲\pi r=۱۰\times\frac{۵\pi}{۶}\Rightarrow r=\frac{۲۵}{۶}\,\text{cm}\ \ \text{طول شعاع قاعده}$$

طبق شکل زیر می‌توان نوشت:



$$h^{۲}=۱۰^{۲}-\left(\frac{۲۵}{۶}\right)^{۲}=\frac{۲۹۷۵}{۳۶}$$

$$h=\frac{۵}{۶}\sqrt{۱۱۹}$$

$$S_{\text{کل}}=S_{\text{جانبی}}+S_{\text{قاعده}}=\pi rL\times\pi r^{۲}$$

$$=\pi r(L+r)=\pi\left(\frac{۲۵}{۶}\right)\left(۱۰+\frac{۲۵}{۶}\right)=\frac{۲۱۲۵\pi}{۳۶}$$

۴

$$\text{با فرض}:\ \frac{x}{y}=\frac{a}{b}=k\ \Rightarrow\ x=ky\,,\ a=kb$$

$$\Rightarrow\frac{\sqrt{x^{۲}+a^{۲}p^{۲}}}{\sqrt{y^{۲}+b^{۲}p^{۲}}}=\frac{\sqrt{k^{۲}y^{۲}+k^{۲}b^{۲}p^{۲}}}{\sqrt{y^{۲}+b^{۲}p^{۲}}}=\sqrt{\frac{k^{۲}(y^{۲}+b^{۲}p^{۲})}{(y^{۲}+b^{۲}p^{۲})}}=\sqrt{k^{۲}}\xrightarrow{k>۰}k$$

۵

الف

$$g(-۱)=۴^{-۱}+۲=\frac{۱}{۴}+۲=\frac{۹}{۴}$$

ب

$$g(x)=۶۶\Rightarrow ۴^{x}+۲=۶۶\Rightarrow ۴^{x}=۶۴=۴^{۳}\Rightarrow x=۳$$

۶

از رابطهٔ دیگر واریانس که به‌صورت زیر است استفاده می‌کنیم.

$$\sigma^{۲}=\frac{\sum x_i^{۲}}{n}-\bar{x}^{۲}=\frac{۲۰۰}{۱۰}-\left(\frac{۳۰}{۱۰}\right)^{۲}=۲۰-۹=۱۱$$

۷

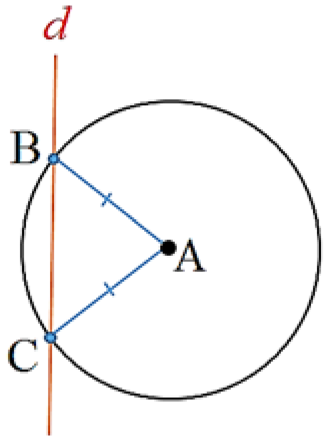
$$\begin{cases}\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{AE}{AC}\\ \dfrac{BF}{BC}=\dfrac{AE}{AC}\end{cases}\Rightarrow\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{BF}{BC}$$

متوازی‌الاضلاع است چون $BF \parallel DE$ و $EF \parallel BD$ است و پاره‌خط BF برابر با DE است.

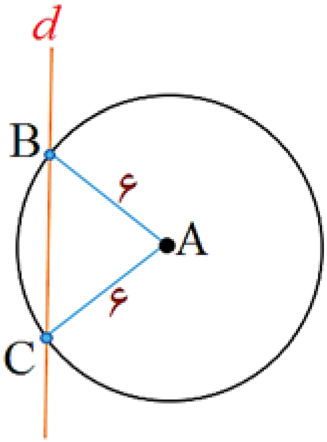
۸

الف دایره‌ای به مرکز A و شعاع r (بیشتر از ۴ باشد) رسم می‌کنیم. محل برخورد این دایره با خط d همان نقاط دیگر رأس‌های مثلث است زیرا:

$AC = AB = r$



ب دایره‌ای به مرکز A و شعاع $r = ۶$ رسم می‌کنیم. محل برخورد این دایره با خط d همان نقاط دیگر رأس‌های مثلث است زیرا: $AC = AB = ۶$

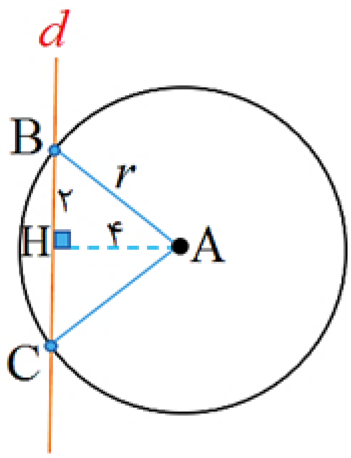


پ چون فاصله عمودی نقطه A از خط d برابر ۴ است و این فاصله همان ارتفاع مثلث است، اگر بخواهیم مساحت این مثلث ۸ سانتی‌متر مربع باشد باید قاعده آن ۴ سانتی‌متر باشد یعنی فاصله دو نقطه B و C روی خط d برابر ۴ باشد، درنتیجه طبق قضیه فیثاغورث داریم:

$$(AB)^۲ = (AH)^۲ + (BH)^۲ \Rightarrow r^۲ = (۴)^۲ + (۲)^۲ = ۱۶ + ۴ = ۲۰ \Rightarrow r = \sqrt{۲۰}$$

بنابراین اگر دایره‌ای به شعاع $\sqrt{۲۰}$ رسم کنیم، محل برخورد این دایره با خط d همان نقاط دیگر رأس‌های مثلث است زیرا: $AC = AB = \sqrt{۲۰}$ این همان مثلثی است که مساحت آن ۸ می‌شود.

$$S_{ABC} = \frac{۱}{۲}(۴)(۴) = ۸$$



۹

$$x^۲ + ۷x = \sqrt{۲x^۲ + ۱۰x + ۱۲} + ۲x - ۶$$
$$\Rightarrow x^۲ + ۷x - ۲x + ۶ = \sqrt{۲x^۲ + ۱۰x + ۱۲}$$
$$\Rightarrow x^۲ + ۵x + ۶ = \sqrt{۲(x^۲ + ۵x + ۶)}$$
$$\xrightarrow{x^۲+۵x+۶=t} t = \sqrt{۲t} \Rightarrow t^۲ - ۲t = ۰ \Rightarrow t(t-۲) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} t = ۰ \\ t = ۲ \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x^۲ + ۵x + ۶ = ۰ \Rightarrow P = \frac{c}{a} = ۶ \\ x^۲ + ۵x + ۶ = ۲ \Rightarrow x^۲ + ۵x + ۴ = ۰ \Rightarrow P = \frac{c}{a} = ۴ \end{cases}$$

پس حاصل‌ضرب ریشه‌های معادله، ۲۴ است.

۱۰ رابطهٔ میانگین را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} \Rightarrow ۲/۵ = \frac{۵+۱+۱+۲+۰+a+a+۲+۱+۳}{۱۰} \Rightarrow ۲/۵ = \frac{۲a+۱۵}{۱۰}$$
$$۲a + ۱۵ = ۲۵ \Rightarrow ۲a = ۱۰ \Rightarrow a = ۵$$

۱۱ نقاط روی خط $y = x - ۳$ را به صورت پارامتری می‌نویسیم و سپس فاصلهٔ این نقاط را از خط $y - ۴x = ۳$ برابر $\sqrt{۱۷}$ قرار می‌دهیم:

$$\frac{|-۴(\alpha) + ۱(\alpha - ۳) - ۳|}{\sqrt{۱+۱۶}} = \sqrt{۱۷} \Rightarrow |-۴(\alpha) + ۱(\alpha - ۳) - ۳| = ۱۷ \Rightarrow |-۳\alpha - ۶| = ۱۷$$
$$\Rightarrow \begin{cases} -۳\alpha - ۶ = ۱۷ \Rightarrow \alpha = -\frac{۲۳}{۳} \\ -۳\alpha - ۶ = -۱۷ \Rightarrow \alpha = \frac{۱۱}{۳} \end{cases}$$

پس دو نقطه به مختصات $A(\frac{۱۱}{۳}, \frac{۲}{۳})$ و $B(-\frac{۲۳}{۳}, -\frac{۳۲}{۳})$ به فاصلهٔ $\sqrt{۱۷}$ از خط $y - ۴x = ۳$ قرار دارند.

۱۲ اگر رأس سهمی (h,k) باشد، معادلهٔ آن به‌صورت $y=a(x-h)^۲+k$ است. پس:

$$y=a(x-۲)^۲+۱$$

نقطهٔ $(۱,۰)$ در معادله صدق می‌کند.

$$۰=a+۱\Rightarrow a=-۱$$

معادلهٔ سهمی:

$$y=-(x-۲)^۲+۱$$

۱۳ فرض کنیم میانگین ۱۰ دادهٔ اولیه $\bar{x}$ باشد. این داده‌ها دارای ضریب تغییرات برابر با ۰/۳ هستند، پس:

$$CV=\frac{\sigma}{\bar{x}}=۰/۳=\frac{\sigma}{\bar{x}}\Rightarrow\sigma=۰/۳\bar{x}\Rightarrow\sigma^۲=۰/۰۹\bar{x}^۲$$

حال باتوجه‌به رابطهٔ واریانس:

$$\sigma^۲=\frac{\sum(x_i-\bar{x})^۲}{n}\Rightarrow ۰/۰۹\bar{x}^۲=\frac{\sum(x_i-\bar{x})^۲}{۱۰}\Rightarrow\sum(x_i-\bar{x})^۲=۰/۹\bar{x}^۲$$

اگر n داده به داده‌ها اضافه کنیم که با میانگین برابر باشند میانگین جدید تغییر نمی‌کند و حاصل $\sum(x_i-\bar{x})^۲$ نیز عوض نمی‌شود. پس واریانس جدید عبارت است از:

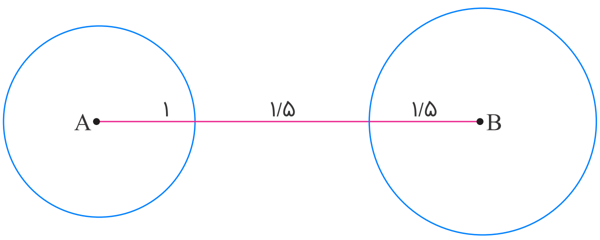
$$\sigma^۲=\frac{\sum(x_i-\bar{x})^۲}{n}\Rightarrow\sigma^۲=\frac{۰/۹\bar{x}^۲+۰}{۱۰+n}=\frac{۰/۹\bar{x}^۲}{۱۰+n}\Rightarrow\sigma=\frac{\sqrt{۰/۹}\bar{x}}{\sqrt{۱۰+n}}$$

در رابطهٔ ضریب تغییرات قرار می‌دهیم:

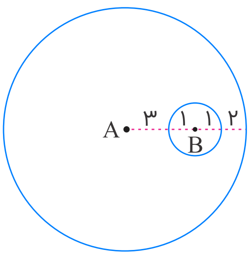
$$CV=\frac{\sigma}{\bar{x}}\Rightarrow\frac{\sqrt{۵}}{۱۰}=\frac{\sqrt{۰/۹}\bar{x}}{\sqrt{۱۰+n}\bar{x}}\Rightarrow\frac{\sqrt{۵}}{۱۰}=\frac{\sqrt{۰/۹}}{\sqrt{۱۰+n}}\Rightarrow\frac{۵}{۱۰۰}=\frac{۰/۹}{۱۰+n}\Rightarrow ۵۰+۵n=۹۰$$
$$\Rightarrow ۵n=۴۰\Rightarrow n=۸$$

۱۴ **الف** نقاطی که از A به فاصلهٔ x باشد، روی دایره‌ای به مرکز A و شعاع x و نقاطی که از B به فاصلهٔ y باشند، روی دایره‌ای به مرکز B و شعاع y قرار دارند. حال برای آنکه چنین نقطه‌ای وجود نداشته باشد، این دو دایره نباید هیچ نقطهٔ مشترکی داشته باشند؛ پس دو حالت داریم:

حالت اول) دایره‌ها متخارج باشند که در این صورت باید اعداد حقیقی و مثبت x و y را چنان انتخاب کنیم که $AB>x+y$ (یعنی $۴>x+y$) باشد. به‌عنوان‌مثال:
$y=۱/۵\ ,\ x=۱$

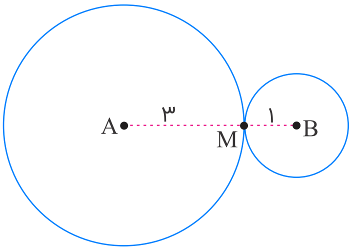


حالت دوم) دایره‌ها متداخل باشند که در این صورت باید اعداد حقیقی و مثبت x و y را چنان انتخاب کنیم که $AB<|x-y|$ (یعنی $۴<|x-y|$)، به‌عنوان‌مثال:
$y=۱\ ,\ x=۷$

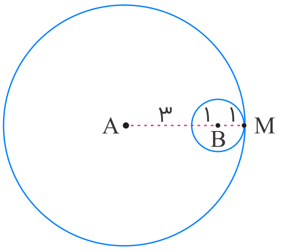


ب نقاطی که از A به فاصلهٔ x باشند، روی دایره‌ای به مرکز A و شعاع x و نقاطی که از B به فاصلهٔ y باشند، روی دایره‌ای به مرکز B و شعاع y قرار دارند. حال برای آنکه فقط یک نقطه با این شرایط وجود داشته باشد، دو دایره باید فقط یک نقطهٔ مشترک داشته باشند که دو حالت داریم:

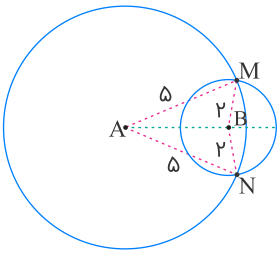
حالت اول) دایره‌ها مماس خارج باشند که در این صورت باید اعداد حقیقی و مثبت x و y را چنان انتخاب کنیم که $AB = x + y$ (یعنی $۴ = x + y$). به‌عنوان‌مثال: $y = ۱,\ x = ۳$



حالت دوم) دایره‌ها مماس داخل باشند که در این صورت باید اعداد حقیقی و مثبت x و y را چنان انتخاب کنیم که $AB = |x - y|$ (یعنی $۴ = |x - y|$). به‌عنوان‌مثال: $y = ۱, x = ۵$

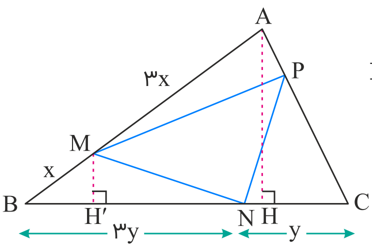


پ نقاطی که از A به فاصلهٔ x باشند، روی دایره‌ای به مرکز A و شعاع x و نقاطی که از B به فاصلهٔ y باشند، روی دایره‌ای به مرکز B و شعاع y قرار دارند. برای آنکه دو نقطه با این شرایط وجود داشته باشد، دایره‌ها باید متقاطع باشند. پس $|x - y| < AB < x + y$ (یعنی $x + y > ۴$ و $|x - y| < ۴$). به‌عنوان‌مثال: $y = ۲, x = ۵$



۱۵ از A و M بر BC عمود می‌کنیم:

حال داریم:



$$\overset{\triangle}{BAH}: MH' \parallel AH \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{MH'}{AH} = \frac{BM}{BA} = \frac{۱}{۴}\ (*)$$

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{BMN}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}} = \frac{\frac{۱}{۲}BN \times MH'}{\frac{۱}{۲}BC \times AH} = \left(\frac{BN}{BC}\right)\left(\frac{MH'}{AH}\right) \overset{(*)}{=} \left(\frac{۳}{۴}\right)\left(\frac{۱}{۴}\right) = \frac{۳}{۱۶}$$

به روش مشابه:

$$S_{\overset{\triangle}{AMP}} = S_{\overset{\triangle}{CNP}} = S_{\overset{\triangle}{BMN}} = \frac{۳}{۱۶} S_{\overset{\triangle}{ABC}}$$

$$S_{\overset{\triangle}{MNP}} = S_{\overset{\triangle}{ABC}} - (S_{\overset{\triangle}{AMP}} + S_{\overset{\triangle}{BMN}} + S_{\overset{\triangle}{CNP}}) = S_{\overset{\triangle}{ABC}} - \frac{۹}{۱۶} S_{\overset{\triangle}{ABC}} = \frac{۷}{۱۶} S_{\overset{\triangle}{ABC}} \Rightarrow \frac{S_{\overset{\triangle}{MNP}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}} = \frac{۷}{۱۶}$$

۱۶ **الف**

$$\log(x^۲ + ۱) = \log ۲ (\log ۴ + \log \frac{۵}{۲}) \Rightarrow \log(x^۲ + ۱) = \log ۲ (\underbrace{\log ۱۰}_{۱})$$

$$\Rightarrow \log(x^۲ + ۱) = \log ۲ \Rightarrow x^۲ + ۱ = ۲ \Rightarrow x = \pm ۱$$

ب مجموع اعداد فرد یک دنبالهٔ حسابی است با قدر نسبت ۲، پس:

$$۱+۳+۵+...+۲n-۱=\frac{n}{۲}(۱+(۲n-۱))=\frac{n}{۲}(۲n)=n^{۲}$$
$$\Rightarrow \log_{۲}^{n^{۲}}=۴+\log_{۲}^{(۲n)}\Rightarrow ۲\log_{۲}^{n}=۴+\log_{۲}^{۲}+\log_{۲}^{n}$$
$$\Rightarrow \log_{۲}^{n}=۵\Rightarrow n=۳۲$$

نکته:

$$\begin{cases}۱+۳+۵+...+۲n-۱=n^{۲}\\ ۲+۴+۶+...+۲n=n(n+۱)\end{cases}$$

۱۷

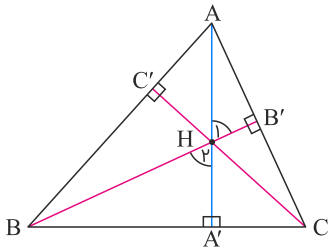
الف $M(۵,۰)$

ب $N(۰,-۲)$

۱۸

الف

$$\hat{H}_{۱}=\hat{H}_{۲},\hat{B}'=\hat{A}'=۹۰^{\circ}\Rightarrow H\overset{\triangle}{B'}A\sim H\overset{\triangle}{A'}B$$



$$\Rightarrow \frac{HB'}{HA'}=\frac{HA}{HB}=\frac{AB'}{BA'}\Rightarrow HA.HA'=HB.HB' \quad (*)$$

به روش مشابه $\Rightarrow H\overset{\triangle}{C'}A\sim H\overset{\triangle}{A'}C\Rightarrow HA.HA'=HC.HC'$

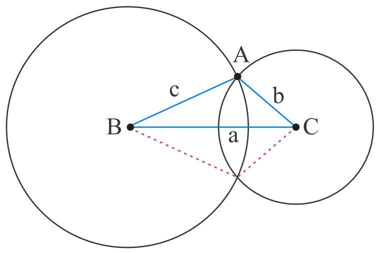
$$\xrightarrow{(*)} HA.HA'=HB.HB'=HC.HC'$$

ب به روش مشابه با قسمت اول داریم:

$$\left.\begin{array}{l}H\overset{\triangle}{B'}A\sim H\overset{\triangle}{A'}B\Rightarrow \frac{AB'}{BA'}=\frac{HA}{HB}\\ H\overset{\triangle}{C'}A\sim H\overset{\triangle}{A'}C\Rightarrow \frac{CA'}{AC'}=\frac{HC}{HA}\\ H\overset{\triangle}{B'}C\sim H\overset{\triangle}{C'}B\Rightarrow \frac{BC'}{CB'}=\frac{HB}{HC}\end{array}\right\}\Rightarrow \left(\frac{AB'}{BA'}\right)\left(\frac{CA'}{AC'}\right)\left(\frac{BC'}{CB'}\right)=\left(\frac{HA}{HB}\right)\left(\frac{HC}{HA}\right)\left(\frac{HB}{HC}\right)=۱$$

$$\Rightarrow AB'.CA'.BC'=BA'.AC'.CB'$$

۱۹ فرض کنیم طول اضلاع مثلث ABC معلوم است. پس نقطهٔ A به فاصلهٔ c از رأس B و به فاصلهٔ b از رأس C قرار دارد و روش رسم، بدین‌صورت است: ابتدا پاره‌خط BC به طول a را رسم می‌کنیم. سپس به مرکزهای B و C و شعاع‌های c و b، دو دایره رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در A قطع کنند. هر مثلث دیگری با این معلومات، با مثلث ABC همنهشت است؛ پس این مسئله حداکثر یک جواب دارد.

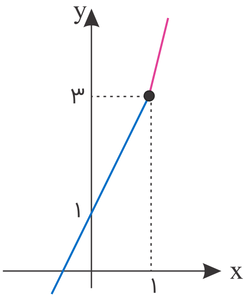


تذکر: در شرایطی با معلومات داده‌شده، مثلث قابل رسم نیست. به‌عنوان‌مثال زمانی که نامساوی مثلثی برای طول اضلاع داده‌شده برقرار نباشد، مثلث قابل رسم نیست. به‌همین‌دلیل کلمهٔ "حداکثر" آمده است.

۲۰

$$y=\begin{cases}۴x-۱ & ;x\geq ۱\\ ۲x+۱ & ;x<۱\end{cases}$$

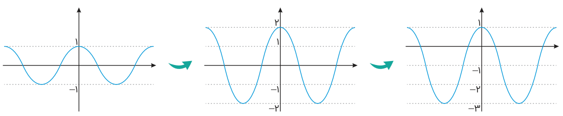
حال این تابع را رسم می‌کنیم:



بنابراین تابع یک‌به‌یک است.

۲۱ ابتدا نمودار cos x را رسم می‌کنیم، سپس مقادیر cos x را روی نمودار دو برابر کرده و در آخر یک واحد به پایین منتقل می‌کنیم.

گزینهٔ ۱ قسمتی از نمودار است.



۲۲

$$\lim_{x\to -۱} f(x):x+۱=t\Rightarrow\begin{cases}x\to -۱:t\to ۰\\ x=t-۱\end{cases}$$

$$\lim_{x\to -۱}\frac{\tan\pi(t-۱)}{\underbrace{(۱-x)}_{۲}(۱+x)}=\lim_{t\to ۰}\frac{\tan(\pi t-\pi)}{۲t}=\lim_{t\to ۰}\frac{\tan\pi t}{۲t}=\frac{\pi}{۲}$$

$$\lim_{x\to ۱} f(x):x-۱=t\Rightarrow\begin{cases}x\to ۱:t\to ۰\\ x=t+۱\end{cases}$$

$$\lim_{x\to ۱}\frac{\tan\pi(t+۱)}{(۱-x)\underbrace{(۱+x)}_{۲}}=\lim_{t\to ۰}\frac{\tan(\pi t+\pi)}{-۲t}=\lim_{t\to ۰}\frac{\tan\pi t}{-۲t}=-\frac{\pi}{۲}$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to -۱} f(x)-\lim_{x\to ۱} f(x)=\frac{\pi}{۲}-(-\frac{\pi}{۲})=\pi$$

پاسخ سؤالات ۲۳ تا ۲۷

۲۳

$$\frac{D}{۱۸۰}=\frac{R}{\pi}\Rightarrow\frac{D}{۱۸۰}=\frac{\frac{۱۱\cancel{\pi}}{۱۲}}{\underset{۱}{\cancel{\pi}}}\Rightarrow D=\frac{\overset{۱۵}{\cancel{۱۸۰}}\times ۱۱}{\underset{۱}{\cancel{۱۲}}}=۱۶۵^{\circ}$$

۲۴

$$\frac{D}{۱۸۰}=\frac{R}{\pi}\Rightarrow\frac{D}{۱۸۰}=\frac{\frac{۲\cancel{\pi}}{۹}}{\underset{۱}{\cancel{\pi}}}\Rightarrow D=\frac{\overset{۲۰}{\cancel{۱۸۰}}\times ۲}{\underset{۱}{\cancel{۹}}}=۴۰^{\circ}$$

۲۵

$$\frac{D}{۱۸۰}=\frac{R}{\pi}\Rightarrow\frac{D}{۱۸۰}=\frac{-\frac{۵\cancel{\pi}}{۱۸}}{\underset{۱}{\cancel{\pi}}}\Rightarrow D=\frac{\overset{۱۰}{\cancel{۱۸۰}}\times(-۵)}{\underset{۱}{\cancel{۱۸}}}=-۵۰^{\circ}$$

۲۶

$$\frac{D}{۱۸۰}=\frac{R}{\pi}\Rightarrow\frac{D}{۱۸۰}=\frac{\frac{۷\cancel{\pi}}{۳۶}}{\underset{۱}{\cancel{\pi}}}\Rightarrow D=\frac{\overset{۵}{\cancel{۱۸۰}}\times ۷}{\underset{۱}{\cancel{۳۶}}}=۳۵^{\circ}$$

۲۷

$$\frac{D}{۱۸۰}=\frac{R}{\pi}\Rightarrow\frac{D}{۱۸۰}=\frac{\frac{۳\pi}{۵}}{\pi}\Rightarrow D=\frac{\overset{۳۶}{\cancel{۱۸۰}}\times ۳}{\underset{۱}{\cancel{۵}}}=۱۰۸^\circ$$

۲۸

چون تابع g وارون‌پذیر است، پس:

$g^{-۱}(۴)=a$

$g(a)=۴\Rightarrow g(a)=۴=۲-f(a+۱)$

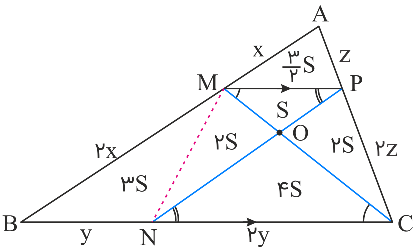
$\Rightarrow ۲=-f(a+۱)\Rightarrow f(a+۱)=-۲$

$\Rightarrow f^{-۱}(-۲)=a+۱\Rightarrow f^{-۱}(-۲)-۱=a$

پس: $g^{-۱}(۴)=f^{-۱}(-۲)-۱$

۲۹

روش اول:



$\overset{\Delta}{AB}C: MP\parallel BC\Rightarrow\frac{MP}{BC}=\frac{AM}{AB}=\frac{۱}{۳}$

$\Rightarrow MP=y, BC=۳y\xrightarrow{\text{BMPN متوازی‌الاضلاع است}}BN=y\Rightarrow NC=۲y$

$\overset{\Delta}{OM}P\sim\overset{\Delta}{OC}N\Rightarrow\frac{S_{\overset{\Delta}{OMP}}}{S_{\overset{\Delta}{OCN}}}=\left(\frac{MP}{CN}\right)^{۲}=\frac{۱}{۴}$

$\Rightarrow S_{\overset{\Delta}{OMP}}=S, S_{\overset{\Delta}{OCN}}=۴S$

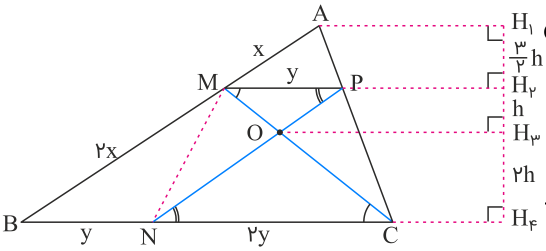
ذوزنقه است $MPCN \Rightarrow S_{\overset{\Delta}{OMN}}=S_{\overset{\Delta}{OPC}}=\sqrt{S_{\overset{\Delta}{OMP}}\times S_{\overset{\Delta}{OCN}}}=\sqrt{۴S^{۲}}=۲S$

متوازی‌الاضلاع است $BMPN\Rightarrow S_{\overset{\Delta}{MBN}}=S_{\overset{\Delta}{MPN}}=۳S$

$\frac{S_{\overset{\Delta}{MPA}}}{S_{\overset{\Delta}{MPC}}}=\frac{PA}{PC}\Rightarrow\frac{S_{\overset{\Delta}{MPA}}}{۳S}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow S_{\overset{\Delta}{MPA}}=\frac{۳}{۲}S$

$\Rightarrow S_{\overset{\Delta}{ABC}}=۳S+۴S+۲S+۲S+S+\frac{۳}{۲}S=\frac{۲۷}{۲}S\Rightarrow\frac{S_{\overset{\Delta}{OMP}}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}}=\frac{S}{\frac{۲۷}{۲}S}=\frac{۲}{۲۷}$

روش دوم: ابتدا همانند روش اول، طول پاره‌خط‌ها را یافته و نام‌گذاری کرده، سپس ارتفاع مثلث را رسم می‌کنیم. حال داریم:



$\overset{\Delta}{OMP}\sim\overset{\Delta}{OCN}\Rightarrow\frac{H_۲H_۳}{H_۳H_۴}=\frac{MP}{NC}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow H_۲H_۳=h, H_۳H_۴=۲h$

تالس : $\frac{H_۱H_۲}{H_۲H_۴}=\frac{AM}{MB}\Rightarrow\frac{H_۱H_۲}{۳h}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow H_۱H_۲=\frac{۳}{۲}h$

$\frac{S_{\overset{\Delta}{OMP}}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}}=\frac{\frac{۱}{۲}(MP)(H_۲H_۳)}{\frac{۱}{۲}(BC)(H_۱H_۴)}=\frac{\frac{۱}{۲}(y)(h)}{\frac{۱}{۲}(۳y)\left(\frac{۹}{۲}h\right)}=\frac{۲}{۲۷}$

۳۰

الف

$\log ۱۸-\log ۱۴۴-\log ۲۵=\log\frac{۱۸}{۱۴۴}-\log ۲۵=\log\frac{\cancel{۱۸}}{\underset{۸}{\cancel{۱۴۴}}\times ۲۵}=\log\frac{۱}{۲۰۰}=-\log ۲۰۰$

ب

$\log_{a^{\frac{۱}{۳}}}^{x}-۳\log_{a^{\frac{۱}{۴}}}^{y}+۲\log_{a^{\frac{۱}{۵}}}^{z^{\frac{۱}{۲}}}=۳\log_a^x-۱۲\log_a^y+۵\log_a^z$

$=\log_a^{x^۳}-\log_a^{y^{۱۲}}+\log_a^{z^۵}=\log_a{\frac{x^۳z^۵}{y^{۱۲}}}$

نکته: برای $a>۰$ و $b>۰$ و $c>۰$ و $c\neq ۱$ ویژگی‌های اصلی لگاریتم در زیر آمده است:

۱) $\log_c^{ab}=\log_c^a+\log_c^b$

۲) $\log_c^{\frac{a}{b}}=\log_c^a-\log_c^b$

۳) $\log_c^{a^n}=n\log_c^a$

۴) $\log_{c^m}^{a^n}=\frac{n}{m}\log_c^a$

۳۱ برای اینکه خط موردنظر بتواند بر هر دو خط داده‌شده عمود باشد می‌بایست این دو خط باهم موازی باشند پس شیب‌های این دو خط باهم برابرند.

$$۲m - ۸ = ۳ - m \Rightarrow ۳m = ۱۱ \Rightarrow m = \frac{۱۱}{۳}$$

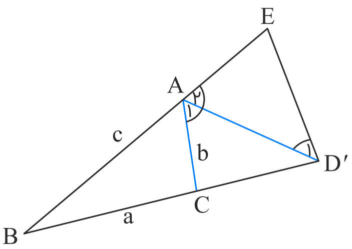
m را در هر یک از دو معادله داده‌شده قرار می‌دهیم

$$y = (۲ \times \frac{۱۱}{۳} - ۸)x + ۵ \Rightarrow y = -\frac{۲}{۳}x + ۵$$
$$y = (۳ - \frac{۱۱}{۳})x - ۱ \Rightarrow y = -\frac{۲}{۳}x - ۱$$

حال باتوجه‌به اینکه خط $y - \frac{۱}{۲}nx + ۲ = ۰$ بر خطوط موازی داده‌شده عمود است پس شیب آن قرینه و معکوس شیب این خطوط یعنی $\frac{۳}{۲}$ است.

$$y = \frac{۱}{۲}nx - ۲ \Rightarrow m' = \frac{۱}{۲}n = \frac{۳}{۲} \Rightarrow n = ۳$$

۳۲ از D' خطی به موازات AC رسم می‌کنیم تا امتداد BA را در نقطهٔ E قطع کند:



حال داریم:

$$CA \parallel D'E \Rightarrow \widehat{A}_۱ = \widehat{D'}_۱ \xrightarrow{\widehat{A}_۱ = \widehat{A}_۲} \widehat{A}_۲ = \widehat{D'}_۱$$

$$\overset{\Delta}{AED'} : \widehat{A}_۲ = \widehat{D'}_۱ \Rightarrow AE = D'E \ (*)$$

$$\overset{\Delta}{BD'E} : CA \parallel D'E \Rightarrow \frac{BA}{BE} = \frac{CA}{D'E} \xrightarrow{(*)} \frac{BA}{BE} = \frac{CA}{AE}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BE}{AE} \xrightarrow{\frac{BE}{AE} = \frac{D'B}{D'C}} \frac{AB}{AC} = \frac{D'B}{D'C}$$

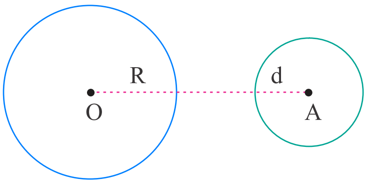
حال با قرار دادن $AC = b$، $AB = c$ و $BC = a$، طول $D'B$ و $D'C$ را می‌یابیم:

$$\frac{D'B}{D'C} = \frac{c}{b} \Rightarrow \frac{D'B - D'C}{D'C} = \frac{c - b}{b}$$
$$\Rightarrow \frac{a}{D'C} = \frac{c - b}{b} \Rightarrow D'C = \frac{ab}{|c - b|}$$

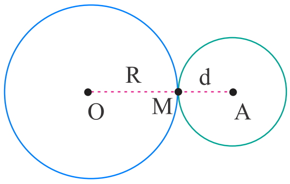
به روش مشابه:

$$D'B = \frac{ac}{|c - b|}$$

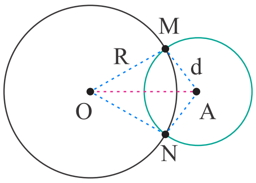
۳۳ کلیهٔ نقاطی که از A به فاصلهٔ d باشند، روی دایره‌ای به مرکز A و شعاع d قرار دارند. پس جواب مسئله، محل برخورد دو دایره است که وضعیت‌های زیر را داریم:



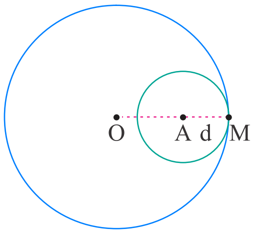
OA>d+R
فاقد جواب



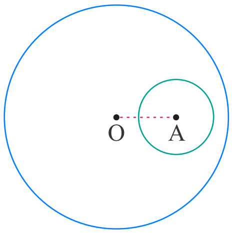
OA=d+R
یک جواب (M)



|R-d|<OA<R+d
دو جواب (M,N)



OA=|R-d|
یک جواب (M)



۰<OA<|R-d|
فاقد جواب

۳۴ دو طرف را بر $x^۲$ تقسیم می‌کنیم:

$$x^۴ + ۲x^۳ - x^۲ + ۲x + ۱ = ۰ \Rightarrow x^۲ + ۲x - ۱ + \frac{۲}{x} + \frac{۱}{x^۲} = ۰$$

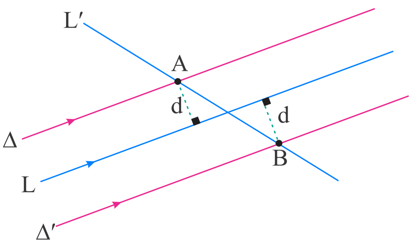
$$\Rightarrow x^۲ + \frac{۱}{x^۲} + ۲(x + \frac{۱}{x}) - ۱ = ۰$$

$$x + \frac{۱}{x} = t \Rightarrow t^۲ - ۲ + ۲t - ۱ = ۰ \Rightarrow t^۲ + ۲t - ۳ = ۰ \Rightarrow t = ۱ \text{ یا } -۳$$

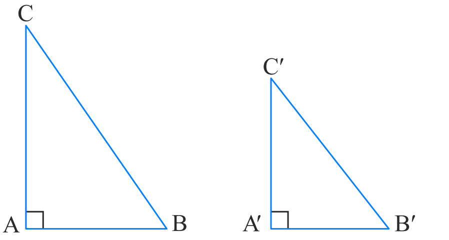
$$x + \frac{۱}{x} = ۱ \Rightarrow x^۲ + ۱ = x \Rightarrow x^۲ - x + ۱ = ۰ \quad \text{جواب ندارد}$$

$$x + \frac{۱}{x} = -۳ \Rightarrow x^۲ + ۱ = -۳x \Rightarrow x^۲ + ۳x + ۱ = ۰ \Rightarrow x = \frac{-۳ \pm \sqrt{۵}}{۲}$$

۳۵ نقاطی که از خط L به فاصلهٔ d باشند، روی خط Δ و Δ' به‌موازات آن و در طرفین آن، قرار دارند. چون L' با L متقاطع است و $\Delta || \Delta' || L$، خط L' با Δ و Δ' هم متقاطع است و مسئله دو جواب دارد (نقاط A و B).



۳۶ دو مثلث قائم‌الزاویهٔ زیر را در نظر می‌گیریم. طبق فرض، داریم:



$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}\ ,\ \hat{A}=\hat{A'}\Rightarrow A\overset{\Delta}{B}C\sim A'\overset{\Delta}{B'}C'$$

۳۷

$$۱۵۷^\circ=۱۸۰^\circ-۲۳^\circ \qquad ۱۱۳^\circ=۹۰^\circ+۲۳^\circ$$
$$۲۹۳^\circ=۳۶۰^\circ-۶۷^\circ \qquad ۶۷^\circ=۹۰^\circ-۲۳^\circ$$

$$\frac{۳\sin ۱۵۷^\circ+۲\cos ۱۱۳^\circ}{\sin ۲۹۳^\circ-\cos ۶۷^\circ}=\frac{۳\sin ۲۳^\circ-۲\sin ۲۳^\circ}{-\sin(۶۷^\circ)-\sin ۲۳^\circ}=\frac{۳\sin ۲۳^\circ-۲\sin ۲۳^\circ}{-\cos ۲۳^\circ-\sin ۲۳^\circ}$$
$$=\frac{\sin ۲۳^\circ}{-\cos ۲۳^\circ-\sin ۲۳^\circ}=-\frac{\tan ۲۳^\circ}{۱+\tan ۲۳^\circ}=-\frac{۰/۴}{۱/۴}=-\frac{۲}{۷}$$

۳۸ باتوجه‌به ویژگی‌های جزءصحیح داریم: $[x+n]=[x]+n\ ;n\in\mathbb{Z}$ و $n\le[x]<n+۱$ $(n\in\mathbb{Z})$.

$$[x^۳-۶x^۲+۱۲x-۸]=[(x-۲)^۳]$$
$$x=۲+\sqrt[۳]{۳}\ :\ [(x-۲)^۳]=[(۲+\sqrt[۳]{۳}-۲)^۳]=۳$$

۳۹

در معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^۲+bx+c=۰$، جمع ریشه‌ها برابر $S=-\frac{b}{a}$ و ضرب ریشه‌ها برابر $P=\frac{c}{a}$ است.

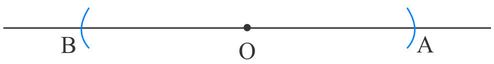
$$S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=\frac{m}{۲}$$
$$P=\alpha\cdot\beta=\frac{c}{a}=\frac{۳}{۲}$$
$$\alpha^۲+\beta^۲=۱۳\Rightarrow(\alpha+\beta)^۲-۲\alpha\beta=۱۳\Rightarrow S^۲-۲P=۱۳\Rightarrow\frac{m^۲}{۴}-۲(\frac{۳}{۲})=۱۳$$
$$\Rightarrow m^۲=۶۴\Rightarrow m=\pm۸$$

۴۰ فقط یک خط عبور می‌کند.

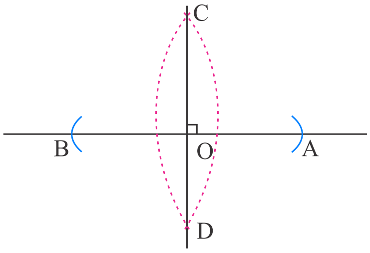
۴۱

الف) ابتدا خطی راست با خط‌کش رسم می‌کنیم:

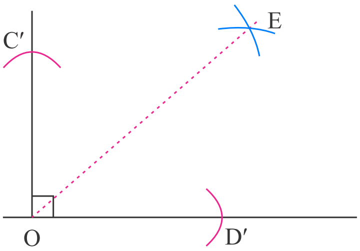
ب) سپس سوزن پرگار را روی خط قرار داده و آن نقطه را O می‌نامیم و دو کمان در دو طرف خط زده، بنابراین پاره‌خط AB تشکیل می‌شود.



پ) حال عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم کرده که برای رسم آن ابتدا دو کمان با اندازهٔ برابر از نقطهٔ A و B زده و محل برخورد دو کمان را به یکدیگر وصل می‌کنیم. اکنون زاویهٔ $A\hat{O}C$ برابر ۹۰° خواهد بود.

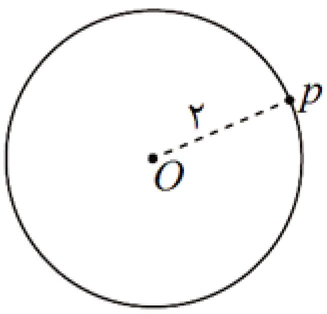


ت) حال نیمساز زاویهٔ AOC را رسم می‌کنیم. برای این کار ابتدا پرگار را به‌اندازهٔ دلخواه باز کرده و کمانی بر خط OA و OC می‌زنیم.
سپس کمان را به‌اندازهٔ دلخواه باز کرده و کمانی از D' و C' زده و محل برخورد آن دو کمان را E می‌نامیم.
پس از آن خط OE را رسم می‌کنیم که همان نیمساز زاویهٔ AOC است. بنابراین $E\hat{O}A$ برابر ۴۵° می‌باشد.



۴۲

فاصلهٔ هر نقطهٔ دلخواه مانند p روی دایره تا مرکز برابر با دو سانتی‌متر است.



۴۳

می‌دانیم $\log_{a}^{x} \frac{m}{n} = \log_{a^n}^{x^m}$، پس:

$$\log_{۹}^{۱۵} = \log_{۳^۲}^{(۳\times۵)} = \frac{۱}{۲}\left(\log_{۳}^{۳} + \log_{۳}^{۵}\right) = \frac{۱}{۲}(۱+\log_{۳}^{۵}) = \frac{۱}{۲} + \frac{۳}{۴x}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲}\log_{۳}^{۵} = \frac{۳}{۴x} \Rightarrow \log_{۳}^{۵} = \frac{۳}{۲x} \Rightarrow \log_{۵}^{۳} = \frac{۱}{\log_{۳}^{۵}} = \frac{۲x}{۳}$$

$$\log_{۲۵}^{۲۷} = \log_{۵^۲}^{۳^۳} = \frac{۳}{۲}\log_{۵}^{۳} = \frac{۳}{۲}\left(\frac{۲x}{۳}\right) = x$$

نکته:

$$\log_{b}^{a} = \frac{۱}{\log_{a}^{b}}$$

الف

$(۱,۰):\ y=۳^x \Rightarrow ۰\neq ۳^۱$

بنابراین نقطهٔ $(۱,۰)$ روی نمودار این تابع قرار ندارد.

ب

$(۳,۱):\ y=۳^x \Rightarrow ۱\neq ۳^۳$

بنابراین نقطهٔ $(۳,۱)$ روی نمودار این تابع قرار ندارد.

پ

$(۰,۱):\ y=۳^x \Rightarrow ۱=۳^۰$

بنابراین نقطهٔ $(۰,۱)$ روی نمودار این تابع قرار دارد.

ت

$(\sqrt{۳},\frac{۱}{۳}):\ y=۳^x \Rightarrow \frac{۱}{۳}\neq ۳^{\sqrt{۳}}$

بنابراین نقطهٔ $(\sqrt{۳},\frac{۱}{۳})$ روی نمودار این تابع قرار ندارد.

ث

$(۱,۳):\ y=۳^x \Rightarrow ۳=۳^۱$

بنابراین نقطهٔ $(۱,۳)$ روی نمودار این تابع قرار دارد.

ج

$(-۱,\frac{۱}{۳}):\ y=۳^x \Rightarrow \frac{۱}{۳}=۳^{-۱}$

بنابراین نقطهٔ $(-۱,\frac{۱}{۳})$ روی نمودار این تابع قرار دارد.

۴۵ در ضابطهٔ بالایی، عامل $[x]$ باعث می‌شود تابع در تمام نقاط صحیح $|x|>۲$ ناپیوسته باشد پس با صفر قرار دادن ضریب آن $a-۱$، اثر ناپیوستگی این عامل را حذف می‌کنیم:

$$a-۱=۰ \Rightarrow a=۱ \Rightarrow f(x)=\begin{cases} ۲c & ;\ |x|\geq ۲ \\ bx^۳+cx-۱ & ;|x|<۲ \end{cases}$$

برای این‌که تابع f روی $\mathbb{R}$ پیوسته باشد، باید در $x=۲$ و $x=-۲$ پیوسته باشد.

$$\lim_{x\to ۲^+} ۲c=۲c \quad , \quad \lim_{x\to ۲^-} bx^۳+cx-۱=۸b+۲c-۱ \quad , \quad f(۲)=۲c$$
$$\Rightarrow ۸b+۲c-۱=۲c \Rightarrow ۸b=۱ \Rightarrow b=\frac{۱}{۸}$$

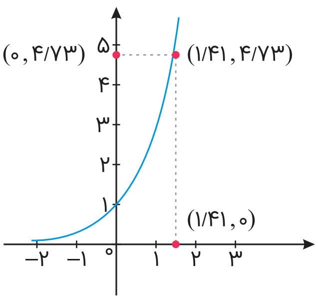
$$\lim_{x\to (-۲)^-} ۲c=۲c \quad , \quad \lim_{x\to (-۲)^+} bx^۳+cx-۱=-۸b-۲c-۱ \quad , \quad f(-۲)=۲c$$
$$\Rightarrow -۸b-۲c-۱=۲c \xrightarrow{b=\frac{۱}{۸}} -۱-۲c-۱=۲c \Rightarrow c=-\frac{۱}{۲}$$

پاسخ سؤالات ۴۶ تا ۴۷

۴۶

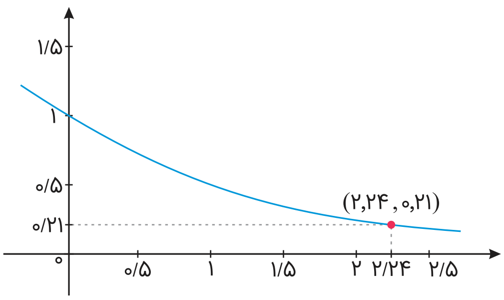
x	۰	۱	$\sqrt{۲} \simeq ۱/۴۱$	۲
y	۱	۳	$۳^{\sqrt{۲}} \simeq ۴/۷۳$	۹

ابتدا $\sqrt{۲}$ را به کمک رسم روی محور xها مشخص می‌کنیم باتوجه‌به نمودار رسم‌شده مقدار تقریبی $۳^{\sqrt{۲}}$ برابر است با ۴/۷۳.



۴۷

مقدار تقریبی $\sqrt{۵} \simeq ۲/۲۴$ را روی محور xها مشخص می‌کنیم باتوجه‌به نمودار مقدار تقریبی $\left(\frac{۱}{۲}\right)^{\sqrt{۵}}$ برابر است با: ۰/۲۱



۴۸

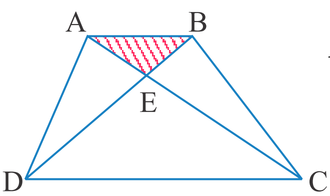
$$\begin{cases} y = \cos(\pi \log ۲x) \\ y = ۰ \end{cases} \Rightarrow \cos(\pi \log ۲x) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cancel{\pi} \log ۲x = -\frac{\cancel{\pi}}{۲} \Rightarrow ۲x = \frac{۱}{\sqrt{۱۰}} \Rightarrow x \simeq \frac{۱}{۶/۳} < \frac{۱}{۵} \\ \cancel{\pi} \log ۲x = \frac{\cancel{\pi}}{۲} \Rightarrow ۲x = \sqrt{۱۰} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{۱۰}}{۲} \\ \cancel{\pi} \log ۲x = \frac{۳\cancel{\pi}}{۲} \Rightarrow ۲x = ۱۰^{\frac{۳}{۲}} = ۱۰\sqrt{۱۰} \Rightarrow x = ۵\sqrt{۱۰} > ۵ \end{cases}$$

پس معادلهٔ فوق در بازهٔ $\left(\frac{۱}{۵}, ۵\right)$ فقط یک جواب دارد.

۴۹

محل برخورد قطرها را E می‌نامیم:



$$\overset{\Delta}{ABE} \sim \overset{\Delta}{DCE} \Rightarrow \frac{S_{\overset{\Delta}{DCE}}}{S_{\overset{\Delta}{ABE}}} = ۳^۲ = ۹$$

همچنین $\overset{\Delta}{ADE}$ و $\overset{\Delta}{ABE}$ مثلث‌هایی هم‌ارتفاع هستند؛ پس نسبت مساحتشان برابر نسبت قاعده‌هاشان است.

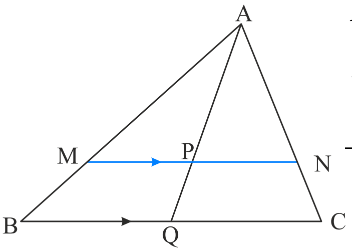
$$\frac{S_{\overset{\Delta}{ADE}}}{S_{\overset{\Delta}{ABE}}} = \frac{DE}{BE} = ۳$$

همین‌طور برای $\overset{\Delta}{BCE}$ داریم:

$$\frac{S_{\overset{\Delta}{BCE}}}{S_{\overset{\Delta}{ABE}}} = ۳$$

$$\Rightarrow S_{ABCD} = S_{\overset{\Delta}{ABE}} + S_{\overset{\Delta}{BCE}} + S_{\overset{\Delta}{ADE}} + S_{\overset{\Delta}{DCE}} = ۱۶S_{\overset{\Delta}{ABE}}$$

۵۰



$$\overset{\Delta}{ABQ} : MP \parallel BQ \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{MP}{BQ} = \frac{AP}{AQ}$$
$$\overset{\Delta}{ACQ} : PN \parallel QC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{PN}{QC} = \frac{AP}{AQ}$$
$$\Rightarrow \frac{MP}{BQ} = \frac{PN}{QC}$$
$$\xrightarrow{\text{خواص تناسب}} \frac{MP}{PN} = \frac{BQ}{QC}$$

.

۵۱

$P(\text{خسرو}) = x \qquad P(\text{کیومرث}) = ۳x$

$$P(\text{خسرو یا کیومرث}) = x + ۳x - ۳x^۲ = \frac{۱۷}{۲۵}$$
$$\Rightarrow ۳x^۲ - ۴x + \frac{۱۷}{۲۵} = ۰ \Rightarrow (۳x - \frac{۱۷}{۵})(x - \frac{۱}{۵}) = ۰ \Rightarrow x = \frac{۱}{۵}$$

۵۲

وقتی دو تیر به هدف خورده باشد، پس یک تیر به هدف نخورده است.

$$\text{تیر } A \text{ به هدف نخورده} : P(A').P(B).P(C) = \frac{۵}{۶} \times \frac{۱}{۴} \times \frac{۱}{۳}$$
$$\text{تیر } B \text{ به هدف نخورده} : P(A).P(B').P(C) = \frac{۱}{۶} \times \frac{۳}{۴} \times \frac{۱}{۳}$$
$$\text{تیر } C \text{ به هدف نخورده} : P(A).P(B).P(C') = \frac{۱}{۶} \times \frac{۱}{۴} \times \frac{۲}{۳}$$

حال مجموع این احتمالات را به دست می‌آوریم:

$$\frac{۵}{۶} \times \frac{۱}{۴} \times \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۶} \times \frac{۳}{۴} \times \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۶} \times \frac{۱}{۴} \times \frac{۲}{۳} = \frac{۵}{۳۶}$$

دو تیر به هدف خورده، حال احتمال آنکه تیر شخص A به هدف خورده باشد برابر است با:

$$P = \frac{\frac{۱}{۶} \times \frac{۳}{۴} \times \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۶} \times \frac{۱}{۴} \times \frac{۲}{۳}}{\frac{۵}{۳۶}} = \frac{\frac{۵}{۷۲}}{\frac{۵}{۳۶}} = \frac{۱}{۲}$$

۵۳

نکته: برای محاسبهٔ دامنهٔ تابع $\log_{g(x)}^{f(x)}$ باید شرط‌های زیر برقرار باشد:

$$f(x) > ۰ \ , \ \ g(x) > ۰ \ , \ \ g(x) \neq ۱$$

پس داریم:

$$-\frac{۱}{۲}x^۲ + ۲x - \frac{۳}{۲} > ۰ \Rightarrow -\frac{۱}{۲}(x^۲ - ۴x + ۳) > ۰$$
$$\Rightarrow -\frac{۱}{۲}(x - ۳)(x - ۱) > ۰ \Rightarrow D_f = (۱, ۳)$$

البته زیر رادیکال هم باید مثبت باشد.

$$\log_{\frac{۱}{۲}}^{(-\frac{۱}{۲}x^۲ + ۲x - \frac{۳}{۲})} > ۰ \Rightarrow -\frac{۱}{۲}x^۲ + ۲x - \frac{۳}{۲} < (\frac{۱}{۲})^۰$$
$$\Rightarrow -\frac{۱}{۲}x^۲ + ۲x - \frac{۳}{۲} < ۱ \Rightarrow -\frac{۱}{۲}x^۲ + ۲x - \frac{۵}{۲} < ۰ \xrightarrow{a<۰, \Delta<۰} \text{همواره برقرار است}$$

پس دامنهٔ $f(x)$، بازهٔ $(۱ \ , \ ۳)$ است.

۵۴ با فرض $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=k$، داریم:

$$a=bk\,,\,c=dk\,,\,e=fk$$

$$\frac{a^۲+c^۲+e^۲}{ab+cd+ef}=\frac{(bk)^۲+(dk)^۲+(fk)^۲}{(bk)b+(dk)d+(fk)f}$$

$$=\frac{b^۲k^۲+d^۲k^۲+f^۲k^۲}{b^۲k+d^۲k+f^۲k}=\frac{(b^۲+d^۲+f^۲)k^۲}{(b^۲+d^۲+f^۲)k}=k\ \ (*)$$

$$\frac{ab+cd+ef}{b^۲+d^۲+f^۲}=\frac{(bk)b+(dk)d+(fk)f}{b^۲+d^۲+f^۲}$$

$$=\frac{b^۲k+d^۲k+f^۲k}{b^۲+d^۲+f^۲}=\frac{(b^۲+d^۲+f^۲)k}{(b^۲+d^۲+f^۲)}=k\ (**)$$

$$(*)\,,\,(**)\ \Rightarrow \frac{a^۲+c^۲+e^۲}{ab+cd+ef}=\frac{ab+cd+ef}{b^۲+d^۲+f^۲}$$

۵۵

$$L:y=۲x-۱\quad,\quad T:y=۲x-۳\quad,\quad \Delta:y=-\frac{۱}{۲}x$$

دو خط T و L موازی‌اند و خط Δ بر دو خط T و L عمود است.

پاسخ سؤالات ۵۶ تا ۵۸

۵۶

$$\begin{cases}x^۲-۱\geq ۰\Rightarrow |x|\geq ۱\\ x^۲-۱\leq ۰\Rightarrow |x|\leq ۱\end{cases}\xrightarrow{\cap} x=\pm ۱\Rightarrow D_f=\{-۱,۱\}$$

۵۷

$$x=-\frac{b}{۲a}=-\frac{(-۱)}{۲(۲)}=\frac{۱}{۴}\Rightarrow y(\frac{۱}{۴})=-\frac{۹}{۸}\Rightarrow (\frac{۱}{۴},-\frac{۹}{۸})$$

۵۸

$$۲^{x-۳}=\frac{۱۵}{۲}\Rightarrow ۲^{x-۳}=۷/۵\Rightarrow ۲<x-۳<۳\Rightarrow ۵<x<۶\Rightarrow n=۵$$