ریاضی و آمار

۱ دو سؤال وجود دارد که برای هرکدام از آن‌ها سه گزینه (۳ حالت) وجود دارد. لذا طبق اصل ضرب داریم:

$$\text{تعداد حالت‌های پاسخگویی به سؤالات} = ۳ \times ۳ = ۹$$

۲

$$S = \frac{n\,[۲a_۱ + (n-۱)\,d]}{۲} \Rightarrow \frac{n\,[۴ + (n-۱)\,۴]}{۲} > ۲۰۰$$
$$۴n^۲ > ۴۰۰ \Rightarrow n > ۱۰ \Rightarrow \text{حداقل ۱۱ جمله باید جمع کنیم}$$

۳

$$\bar{x} = \frac{۴۰}{۱۰} = ۴$$
$$\text{میانه} = \frac{۳+۴}{۲} = ۳/۵$$

۴ از هفت جملهٔ موجود، ۴ جمله شمارهٔ فرد و ۳ جمله شمارهٔ زوج دارند: $S_{\text{فرد}} = S_{\text{زوج}}$

جملات فرد با $a_۱$ و جملات زوج با $a_۲$ شروع می‌شوند و $d' = ۲d$ که d' اختلاف مشترک دنباله‌های جدید است.

$$\frac{۳}{۲}\,(۲a_۲ + (۳-۱)\,d') = \frac{۴}{۲}\,(۲a_۱ + (۴-۱)\,d')$$

از طرفی داریم: $a_۲ = a_۱ + d$

$$\Rightarrow \frac{۳}{۲}\,(۲a_۱ + ۲d + ۲d') = ۲\,(۲a_۱ + ۳d')$$
$$\Rightarrow \frac{۳}{۲}\,(۲a_۱ + ۶ + ۱۲) = ۲\,(۲a_۱ + ۱۸)$$
$$\Rightarrow ۳a_۱ + ۲۷ = ۴a_۱ + ۳۶ \Rightarrow a_۱ + ۹ = ۰ \Rightarrow a_۱ = -۹$$
$$\Rightarrow \text{دنبالهٔ حسابی} : -۹, -۶, -۳, ۰, ۳, ۶, ۹$$

۵

$$d = ۴ \quad , \quad ۱۴, ۱۸, ۲۲$$

۶ **الف** نادرست است، زیرا:

$$\begin{cases} \frac{۸!}{۴!} = \frac{۸ \times ۷ \times ۶ \times ۵ \times \cancel{۴!}}{\cancel{۴!}} = ۱۶۸۰ \\ ۲! = ۲ \times ۱ = ۲ \end{cases} \Rightarrow \frac{۸!}{۴!} \neq ۲!$$

ب درست است، زیرا وقتی یک عدد طبیعی که به‌صورت فاکتوریل است را باز می‌کنیم، هرجا متوقف می‌شویم باید علامت فاکتوریل قرار دهیم.

۷ اعداد $-۳, ۲, ۷, \ldots, ۳۹۷$ یک دنبالهٔ حسابی با اختلاف مشترک ۵ را ایجاد می‌کنند، لذا ابتدا تعداد جملات دنباله را به دست می‌آوریم:

$$d = a_۲ - a_۱ = ۲ - (-۳) = ۵$$
$$a_n = a_۱ + (n-۱)\,d \xrightarrow[a_n = ۳۹۷]{a_۱ = -۳\ ,\ d = ۵} ۳۹۷ = -۳ + (n-۱) \times ۵$$
$$\Rightarrow ۴۰۰ = ۵n - ۵ \Rightarrow ۴۰۵ = ۵n \Rightarrow n = \frac{۴۰۵}{۵} = ۸۱$$
$$S_n = \frac{n}{۲}\,(۲a_۱ + (n-۱)\,d) \xrightarrow[a_۱ = -۳\ ,\ d = ۵]{n = ۸۱} S_{۸۱} = \frac{۸۱}{۲}\,(۲\,(-۳) + ۸۰ \times ۵)$$
$$= \frac{۸۱}{۲}\,(-۶ + ۴۰۰) = \frac{۸۱}{\cancel{۲}_{۱}} \times \cancel{۳۹۴}^{۱۹۷} = ۸۱ \times ۱۹۷ = ۱۵۹۵۷$$

پاسخ سؤالات ۸ تا ۱۱

۸ کیفی (اسمی یا ترتیبی)

۹ اول (بیان مسئله)

۱۰ یازدهم "۱۱"

۱۱ $+۲$ و -۲

۱۲

$$n(S) = \binom{۷}{۲} = \frac{۷!}{۲! \times ۵!} = ۲۱$$
$$n(A) = \binom{۴}{۲} = ۶ \qquad P(A) = \frac{۶}{۲۱}$$

۱۳

الف ۵۰۴۰ یا ۱ × ۲ × ۳ × ۴ × ۵ × ۶ × ۷ یا !۷

ب

$$۱ \times ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۱۲۰$$

۱۴ روش اول: ترتیب انتخاب بازیکنان مهم است، پس داریم:

$$P(۶,۳) = \frac{۶!}{(۶-۳)!} = \frac{۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳!}{۳!} = ۱۲۰$$

روش دوم:

$$\underset{\substack{\downarrow\\ \text{طریق}\\ \text{انتخاب}\\ \text{بازیکن حمله}}}{\underline{۶}} \quad \underset{\substack{\downarrow\\ \text{طریق}\\ \text{انتخاب}\\ \text{بازیکن هافبک}}}{\underline{۵}} \quad \underset{\substack{\downarrow\\ \text{طریق}\\ \text{انتخاب}\\ \text{بازیکن دفاع}}}{\underline{۴}} \quad \Rightarrow ۶ \times ۵ \times ۴ = ۱۲۰$$

۱۵

الف هندسی

ب

$$\begin{cases} a_{n+۱} = \frac{۱}{۵}a_n \\ a_۱ = ۱ \end{cases}$$

پ

$$a_n = ۱ \times (\frac{۱}{۵})^{n-۱}$$

ت $(\frac{۱}{۵})^{۱۰}$

پاسخ سؤالات ۱۶ تا ۱۹

۱۶ ناسازگار

۱۷ ۲۴

۱۸ A'

۱۹ سوم

۲۰

$$n(S)=\binom{۹}{۶}=\frac{۹!}{۶!۳!}=۸۴$$

$$n(A)=\binom{۵}{۴}\times\binom{۴}{۲}=۳۰$$

$$\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۳۰}{۸۴}$$

۲۱ چون کلمهٔ موردنظر باید با حروف نقطه‌دار شروع شود، خانه سمت راست به دو طریق می‌تواند پر می‌شود (حروف "ت" یا "ن"). ازطرفی تکرار حروف غیرمجاز است، پس خانه‌های وسط و سمت چپ به ترتیب به چهار طریق و سه طریق پر می‌شوند. بنابراین داریم:

$\boxed{۳}$ $\boxed{۴}$ $\boxed{۲}$ $\Rightarrow$ تعداد کلمات مطلوب $= ۲ \times ۴ \times ۳ = ۲۴$

حالت حالت حالت

۲۲ باید به‌جای a_n عدد ۳ را قرار دهیم و مقدار n را به دست آوریم:

$$a_n=\frac{۲n+۱}{n-۲}\xrightarrow{a_n=۳}۳=\frac{۲n+۱}{n-۲}\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}}۳n-۶=۲n+۱$$

$$\Rightarrow ۳n-۲n=۶+۱\Rightarrow n=۷$$

۲۳

$$A=\frac{t^{۲}-t^{۵}+t^{۸}-\cdots+t^{۲۰}}{t^{۳}+t^{۹}+t^{۱۵}+t^{۲۱}}$$

$$\Rightarrow A=\frac{\dfrac{t^{۲}(۱-(-t^{۳})^{۷})}{۱-(-t^{۳})}}{\dfrac{t^{۳}(۱-(t^{۶})^{۴})}{۱-(t^{۶})}}=\frac{\dfrac{t^{۲}(۱+t^{۲۱})}{۱+t^{۳}}}{\dfrac{t^{۳}(۱-t^{۲۴})}{۱-t^{۶}}}=\frac{t^{۲}(۱+t^{۲۱})(۱-t^{۶})}{t^{۳}(۱-t^{۲۴})(۱+t^{۳})}$$

$$=\frac{t^{۲}(۱+t^{۲۱})(۱-t^{۳})(۱+t^{۳})}{t^{۳}(۱-t^{۲۴})(۱+t^{۳})}=\frac{(۱+t^{۲۱})(۱-t^{۳})}{t(۱-t^{۲۴})}$$

حال $t=\sqrt[۳]{۲}$ را قرار می‌دهیم:

$$\Rightarrow A=\frac{(۱+\sqrt[۳]{۲}^{۲۱})(۱-\sqrt[۳]{۲}^{۳})}{\sqrt[۳]{۲}(۱-\sqrt[۳]{۲}^{۲۴})}=\frac{(۱+۲^{۷})(۱-۲)}{\sqrt[۳]{۲}(۱-۲^{۸})}=\frac{-(۱+۱۲۸)}{\sqrt[۳]{۲}(۱-۲۵۶)}=\frac{-۱۲۹}{-۲۵۵\sqrt[۳]{۲}}=\frac{۱۲۹}{۲۵۵\sqrt[۳]{۲}}$$

پاسخ سؤالات ۲۴ تا ۲۷

۲۴ ۲۰

۲۵ ۵

۲۶ تعداد

۲۷ برآمد

پاسخ سؤالات ۲۸ تا ۲۹

۲۸

$$(m^{\frac{۳}{۲}}n)(mn^{\frac{۳}{۲}})=m^{\frac{۵}{۲}}n^{\frac{۵}{۲}}=(mn)^{\frac{۵}{۲}}=\sqrt{(mn)^{۵}}$$

۲۹

$$(۸ \times \frac{۳}{۲})^{\frac{۲}{۷}} = ۱۲^{\frac{۲}{۷}} = \sqrt[۷]{(۱۲)^{۲}} = \sqrt[۷]{۱۴۴}$$

۳۰

$$= \sqrt[۶]{۷۷\sqrt{\sqrt{۷^{۲} \times ۷}}} \times \sqrt[۶]{\sqrt{۷}} = \sqrt[۶]{۷\sqrt[۴]{۷^{۳}}} \times \sqrt[۱۲]{۷} = \sqrt[۶]{\sqrt[۴]{۷^{۷}}} \times \sqrt[۱۲]{۷}$$

$$= \sqrt[۲۴]{۷^{۷}} \times \sqrt[۱۲]{۷} = \sqrt[۲۴]{۷^{۷}} \times \sqrt[۲۴]{۷^{۲}} = \sqrt[۲۴]{۷^{۹}}$$

۳۱ **الف**

$$a_n = a_۱ + (n-۱)d \xrightarrow[d=۴]{a_۱=۱} a_n = ۱ + (n-۱)(۴) \Rightarrow a_n = ۴n - ۳$$

ب

$$a_n = ۴n - ۳ \Rightarrow ۴n - ۳ = ۴۰۱ \Rightarrow ۴n = ۴۰۱ + ۳ \Rightarrow ۴n = ۴۰۴ \Rightarrow n = \frac{۴۰۴}{۴} = ۱۰۱$$

$$S_n = \frac{n \times (a_۱ + a_n)}{۲} = \frac{۱۰۱ \times (۱ + ۴۰۱)}{۲} = \frac{۱۰۱ \times ۴۰۲}{۲} = ۱۰۱ \times ۲۰۱ = ۲۰۳۰۱$$

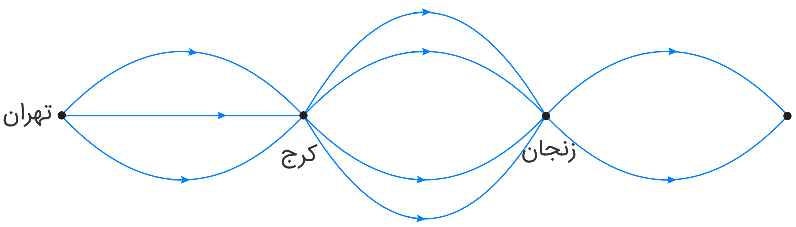
یا:

$$S_n = \frac{n \times (۲a_۱ + (n-۱) \times d)}{۲} = \frac{۱۰۱ \times (۲ \times ۱ + (۱۰۱ - ۱) \times ۴)}{۲} = \frac{۱۰۱ \times (۲ + ۴۰۰)}{۲} = \frac{۱۰۱ \times ۴۰۲}{۲} = ۱۰۱ \times ۲۰۱ = ۲۰۳۰۱$$

.

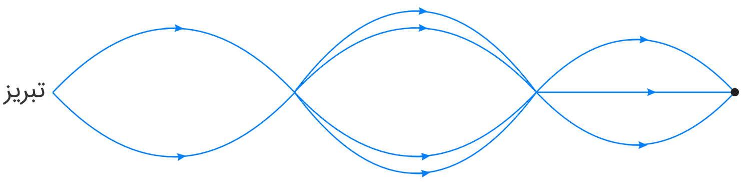
۳۲ **الف**

تعداد راه‌های ممکن برای رفتن از تهران به تبریز:



$\Rightarrow ۳ \times ۴ \times ۲ = ۲۴$

تعداد راه‌های ممکن برای برگشت از تبریز به تهران:



$\Rightarrow ۲ \times ۴ \times ۳ = ۲۴$

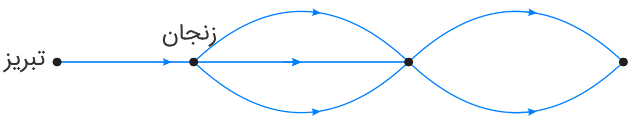
طبق اصل ضرب، تعداد کل راه‌های رفت و برگشت عبارت است از:

$$۲۴ \times ۲۴ = ۵۷۶$$

ب مسیرهای رفتن از تهران به تبریز دقیقاً مانند قسمت قبل است.

$$\text{تعداد راه‌های ممکن برای رفتن از تهران به تبریز} = ۳ \times ۴ \times ۲ = ۲۴$$

چون گفته‌شده مسیرهای رفت و برگشت نباید تکراری باشند، پس مسیرهایی که در رفت از آن‌ها استفاده کردیم، در برگشت حذف می‌شوند.
تعداد راه‌های ممکن برای بازگشت از تبریز به تهران:



تهران $\Rightarrow ۱ \times ۳ \times ۲ = ۶$

حال طبق اصل ضرب، تعداد کل راه‌های رفت و برگشت عبارت است از:

$$\text{تعداد کل راه‌های انتخابی} = (\text{تعداد حالات مسیر رفت}) \times (\text{تعداد حالات مسیر برگشت})$$

$$\Rightarrow \text{تعداد کل راه‌های انتخابی} = ۲۴ \times ۶ = ۱۴۴$$

۳۳ جملهٔ اول این دنباله -۱ و جملهٔ چهارم آن برابر $\frac{۲۷}{۸}$ است. باتوجه‌به اینکه در دنبالهٔ هندسی جملهٔ nام از رابطهٔ $a_n = a_۱ q^{n-۱}$ محاسبه می‌شود، با داشتن $a_۱$ و $a_۴$ می‌توان مقدار q یا همان قدر نسبت (نسبت مشترک) دنباله را به‌صورت زیر محاسبه کرد:

$$\frac{a_۴}{a_۱} = \frac{\frac{۲۷}{۸}}{-۱} = -\frac{۲۷}{۸} = \frac{a_۱ q^{۴-۱}}{a_۱} = q^{۴-۱} = q^۳$$
$$q^۳ = -\frac{۲۷}{۸} \Rightarrow q = -\frac{۳}{۲}$$

مجموع n جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی از رابطهٔ $S_n = \frac{a_۱(۱-q^n)}{۱-q}$ محاسبه می‌شود، پس مجموع شش جملهٔ اول این دنباله برابر است با:

$$S_۶ = \frac{-۱\left(۱-\left(-\frac{۳}{۲}\right)^۶\right)}{۱-\left(-\frac{۳}{۲}\right)} = \frac{-\left(۱-\left(\frac{۷۲۹}{۶۴}\right)\right)}{۱+\frac{۳}{۲}} = \frac{-\left(\frac{-۶۶۵}{۶۴}\right)}{\frac{۵}{۲}} = \frac{۱۳۳}{۳۲}$$

۳۴ **الف** ابتدا مثلث خیام را رسم می‌کنیم و مجموع اعداد هر سطر را می‌نویسیم:

$$
\begin{array}{l}
۱ \xrightarrow{\text{مجموع}} a_۱ = ۱ = ۲^۰ \\
۱ \quad ۱ \xrightarrow{\text{مجموع}} a_۲ = ۲ = ۲^۱ \\
۱ \quad ۲ \quad ۱ \xrightarrow{\text{مجموع}} a_۳ = ۴ = ۲^۲ \\
۱ \quad ۳ \quad ۳ \quad ۱ \xrightarrow{\text{مجموع}} a_۴ = ۸ = ۲^۳ \\
۱ \quad ۴ \quad ۶ \quad ۴ \quad ۱ \xrightarrow{\text{مجموع}} a_۵ = ۱۶ = ۲^۴ \\
۱ \quad ۵ \quad ۱۰ \quad ۱۰ \quad ۵ \quad ۱ \xrightarrow{\text{مجموع}} a_۶ = ۳۲ = ۲^۵
\end{array}
$$

پس نتیجه می‌گیریم که جملهٔ عمومی دنباله (ضابطهٔ تابعی آن) برابر با $a_n = ۲^{n-۱}$ است.

ب به جملات این رابطه یک بار دیگر دقت کنید.

$$۱, ۲, ۴, ۸, ۱۶, ۳۲, \ldots \xrightarrow[\text{و جملهٔ بعدی به دست آمده است.}]{\text{هر جمله در عدد ۲ ضرب شده}} a_{n+۱} = ۲a_n \ , \ a_۱ = ۱$$

پاسخ سؤال ۳۵

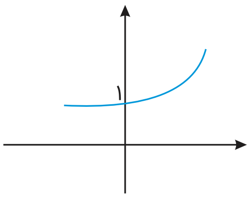
۳۵ اعداد طبیعی $(\mathbb{N})$ - اعداد حقیقی $(\mathbb{R})$

۳۶

الف

x	۱-	۰	۱
$y = ۲^x$	$\frac{۱}{۲}$	۱	۲

ب



۳۷

$$۳, -۴, ۵, -۶, ۷$$

۳۸

t_n زمانی صحیح است که صورت آن بر مخرج آن بخش‌پذیر باشد. ازآنجایی‌که ۱۹ عددی اول است، فقط دو شمارندهٔ طبیعی ۱۹ و ۱ دارد. اما چون جملات صحیح مدنظر است می‌توان ۱۹- و ۱- را نیز در نظر گرفت.

$$۳n + ۱ = ۱۹ \Rightarrow ۳n = ۱۸ \Rightarrow n = ۶ \in \mathbb{N} \quad \checkmark$$

$$۳n + ۱ = -۱۹ \Rightarrow ۳n = -۲۰ \Rightarrow n = \frac{-۲۰}{۳} \notin \mathbb{N} \quad \times$$

$$۳n + ۱ = ۱ \Rightarrow ۳n = ۰ \Rightarrow n = ۰ \notin \mathbb{N} \quad \times$$

$$۳n + ۱ = -۱ \Rightarrow ۳n = -۲ \Rightarrow n = \frac{-۲}{۳} \notin \mathbb{N} \quad \times$$

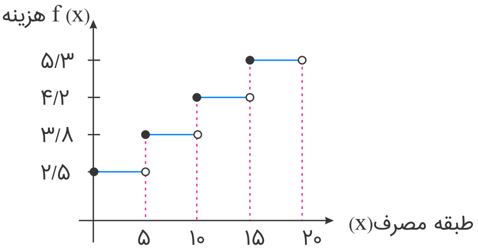
پس فقط یک جملهٔ صحیح دارد.

۳۹

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\binom{۵}{۳} \times \binom{۳}{۱} + \binom{۵}{۴} \times \binom{۳}{۰}}{\binom{۸}{۴}} = \frac{۳۵}{۷۰} = \frac{۱}{۲}$$

۴۰

الف

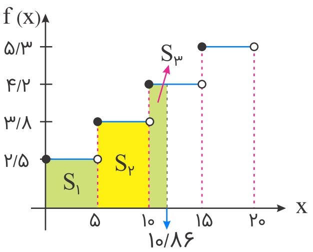


$$f(x) = \begin{cases} ۲/۵ & ; ۰ \leq x < ۵ \\ ۳/۸ & ; ۵ \leq x < ۱۰ \\ ۴/۲ & ; ۱۰ \leq x < ۱۵ \\ ۵/۳ & ; ۱۵ \leq x < ۲۰ \end{cases}$$

دامنه : $D_f = \{x | x \in \mathbb{R}, ۰ \leq x < ۲۰\}$

برد : $R_f = \{۲/۵, ۳/۸, ۴/۲, ۵/۳\}$

ب اگر طبقه مصرف ۱۰/۸۶ مترمکعب باشد، مساحت شکل زیر، مقدار آب‌بها را مشخص می‌کند. (مساحت را با حرف S نمایش می‌دهیم)



آب‌بها $= S_۱ + S_۲ + S_۳ = (۵ \times ۲/۵) + (۵ \times ۳/۸) + (۰/۸۶ \times ۴/۲)$

$= ۱۲/۵ + ۱۹ + ۳/۶۱۲ = ۳۵/۱۱۲$ ریال

۴۱

$$\Rightarrow r = \frac{-۶}{۳} = -۲$$

$$S_n = -۶۳ \, , \, n = ?$$

$$S_n = \frac{a_۱(۱ - r^n)}{۱ - r} \Rightarrow -۶۳ = \frac{۳[۱ - (-۲)^n]}{۱ - (-۲)} \Rightarrow -۶۳ = \frac{۳[۱ - (-۲)^n]}{۳}$$

$$\Rightarrow -۶۳ = ۱ - (-۲)^n \Rightarrow (-۲)^n = ۱ + ۶۳ = ۶۴$$

$$\Rightarrow (-۲)^n = (-۲)^۶ \Rightarrow n = ۶$$

پاسخ سؤال ۴۲

۴۲ نادرست

۴۳ ۴ جملهٔ اول دنباله:

۳ , ۵ , ۷ , ۹

فرمول بازگشتی:

$$a_{n+۱} = a_n + ۲ \quad , \quad a_۱ = ۳$$

۴۴

$$d = ۵ \Rightarrow S_{۱۲} = \frac{۱۲}{۲}[-۴ + (۱۲ - ۱) \times ۵] = ۳۰۶$$

۴۵

راه‌حل اول:

$$\frac{\binom{۷}{۰}\binom{۵}{۳}+\binom{۷}{۱}\binom{۵}{۲}+\binom{۷}{۲}\binom{۵}{۱}}{\binom{۱۲}{۳}}=\frac{۱۸۵}{۲۲۰}=\frac{۳۷}{۴۴}$$

راه‌حل دوم:

$$\text{A متمم} \Rightarrow \text{هر ۳ مهرهٔ قرمز} \Rightarrow \frac{\binom{۷}{۳}\binom{۵}{۰}}{\binom{۱۲}{۳}}=\frac{۳۵}{۲۲۰}=\frac{۷}{۴۴}$$

$$P(A)=۱-\frac{۷}{۴۴}=\frac{۳۷}{۴۴}$$

۴۶

$$۶۰۱=۲۵+(n-۱)\times۱۸\Rightarrow n=۳۳$$

۴۷

$$a_۱+a_۳=۴a_۲\Rightarrow a_۱+a_۱r^۲=۴a_۱r\Rightarrow a_۱(۱+r^۲)=۴a_۱r$$

$$۱+r^۲=۴r\Rightarrow r^۲-۴r+۱=۰$$

$$\Delta=b^۲-۴ac=(-۴)^۲-۴(۱)(۱)=۱۶-۴=۱۲$$

$$r=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{-(-۴)\pm\sqrt{۱۲}}{۲(۱)}=\frac{۴\pm\sqrt{۴\times۳}}{۲}$$

$$\Rightarrow\frac{۴\pm۲\sqrt{۳}}{۲}=\frac{۲(۲\pm\sqrt{۳})}{۲}=۲\pm\sqrt{۳}\xrightarrow{\text{دنباله افزایشی است}}r=۲+\sqrt{۳}$$

۴۸

$$d=۲,a_۱=۲\Rightarrow S_{۱۶}=\frac{۱۶}{۲}[۲\times۲+۱۵\times۲]\Rightarrow S_{۱۶}=۲۷۲$$

۴۹

$$\begin{cases}a_۹=a+۸d\Rightarrow ۶۱=a+۸d\\ a_{۱۶}=a+۱۵d\Rightarrow ۹۶=a+۱۵d\end{cases}\Rightarrow ۷d=۳۵\Rightarrow d=۵\ ,\quad a=۲۱$$

$$a_{۳۰}=۲۱+۲۹\times۵=۱۶۶$$

۵۰

روش اول:

$$d=۲\quad,\quad a_۱=۱\Rightarrow S_{۳۰}=\frac{۳۰}{۲}[۲\times۱+۲۹\times۲]=۹۰۰$$

روش دوم:

$$a_۱=۱\quad,\quad a_{۳۰}=۵۹\Rightarrow S_{۳۰}=\frac{۳۰}{۲}[۱+۵۹]=۹۰۰$$

۵۱

الف A: پیشامد آنکه روی عدد اول بایستد.

$$A=\{۲,۳,۵,۷\}\Rightarrow n(A)=۴$$

$$S=\{۱,۲,۳,...,۸\}\Rightarrow n(S)=۸$$

$$\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۴}{۸}=\frac{۱}{۲}$$

ب B: پیشامد آنکه روی عدد کوچک‌تر یا مساوی ۴ بایستد.

$$B=\{۴,۳,۲,۱\}\Rightarrow n(B)=۴$$

$$P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{۴}{۸}=\frac{۱}{۲}$$

۵۲ چون برای قرار گرفتن در یک صف، ترتیب مهم است؛ لذا با یک مسئلهٔ ترتیب مواجه هستیم. می‌دانیم تعداد جایگشت‌های n شیء متمایز برابر است با $n!$، بنابراین تعداد جایگشت‌های ۸ نفر برابر است با:

$$\text{تعداد کل حالت‌های ممکن} \quad ۸! = ۸ \times ۷ \times ۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۴۰۳۲۰$$

۵۳ نکته: می‌دانیم اگر a, b, c سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ هندسی باشند، آنگاه رابطهٔ زیر بین این جملات برقرار است:

$$a, b, c \Rightarrow b^{۲} = a \times c$$

یعنی مربع جملهٔ وسط برابر است با حاصل‌ضرب جملات طرفینش.

به هریک از اعداد ۴۷− و ۱۳ و ۲− مقدار ثابتی اضافه می‌کنیم، یعنی:

$$-۲ + x \ , \ ۱۳ + x \ , \ -۴۷ + x$$

طبق نکتهٔ بالا داریم:

$$(۱۳ + x)^{۲} = (x - ۲)(x - ۴۷)$$
$$\Rightarrow x^{۲} + ۲۶x + ۱۶۹ = x^{۲} - ۴۹x + ۹۴ \Rightarrow ۷۵x = -۷۵ \Rightarrow x = -۱$$

پس جملات دنباله به‌صورت زیر خواهد بود:

$$-۲ - ۱ \ , \ ۱۳ - ۱ \ , \ -۴۷ - ۱ \ \Rightarrow -۳ \ , \ ۱۲ \ , \ -۴۸$$
$$\text{قدر نسبت} : r = \frac{۱۲}{-۳} = -۴$$

۵۴ نکته: اگر بخواهیم از بین n شیء، r شیء را انتخاب کنیم به‌طوری‌که حتماً k انتخاب اجباری داشته باشیم، تعداد حالات انتخاب مختلف به‌صورت $\binom{n-k}{r-k}$ است.

چون دانش‌آموز باید به ۳ سؤال اول حتماً جواب دهد (۳ انتخاب اجباری داریم)، پس باید از بین ۷ سؤال باقی‌مانده به ۵ سؤال جواب دهد؛ یعنی داریم:

$$\binom{n-k}{r-k} = \binom{۱۰ - ۳}{۸ - ۳} = \binom{۷}{۵} = \frac{۷!}{(۷ - ۵)! \times ۵!} = \frac{۷ \times ۶ \times ۵!}{۲! \times ۵!} = ۲۱$$

۵۵

$$\frac{-\sqrt[۳]{(۲^{a})^{۳}} \times \sqrt{۲}}{۴\sqrt{۲}} = (-\frac{۱}{۲^{۶}})^{۳} \Rightarrow -\frac{۲^{a} \times \cancel{\sqrt{۲}}}{۴\cancel{\sqrt{۲}}} = -\frac{۱}{۲^{۱۸}}$$
$$\Rightarrow ۲^{a-۲} = ۲^{-۱۸} \Rightarrow a = -۱۶$$

پاسخ سؤالات ۵۶ تا ۵۹

۵۶ جملهٔ اول و nاُم دنباله ۲ و ۹۵ است و قدر نسبت (اختلاف مشترک) برابر ۳، پس:

$$a_n = a_۱ + (n - ۱)\, d$$
$$\Rightarrow ۹۵ = ۲ + (n - ۱)\, ۳ \Rightarrow ۳n - ۱ = ۹۵ \Rightarrow n = ۳۲$$

۵۷ $S_۱$ و $S_۲$ را می‌یابیم:

$$S_۱ = a_۱ = ۲ \text{ و } S_۲ = ۵ \Rightarrow a_۲ = S_۲ - S_۱ = ۵ - ۲ = ۳ \Rightarrow d = a_۲ - a_۱ = ۱$$

۵۸

$$S_n = \frac{۵}{۳}(۴^{n} - ۱) \Rightarrow S_۱ = a_۱ = ۵, S_۲ = ۲۵ \Rightarrow a_۲ = S_۲ - S_۱ = ۲۵ - ۵ = ۲۰$$
$$q = \frac{a_۲}{a_۱} = \frac{۲۰}{۵} = ۴ \Rightarrow aq^{n-۱} = ۸۰ \Rightarrow ۵(۴)^{n-۱} = ۸۰ \Rightarrow n = ۳$$

۵۹

$$\frac{S_{۲n}}{S_n} = \frac{\dfrac{a_۱(۱ - q^{۲n})}{۱ - q}}{\dfrac{a_۱(۱ - q^{n})}{۱ - q}} = \frac{۱ - q^{۲n}}{۱ - q^{n}} = \frac{\cancel{(۱ - q^{n})}(۱ + q^{n})}{\cancel{۱ - q^{n}}} = ۱ + q^{n}$$

۶۰

الف

در کیسه مجموعاً ۹ مهره وجود دارد که می‌خواهیم ۳تای آن‌ها را به تصادف انتخاب کنیم، لذا خواهیم داشت:

$$n(S)=\binom{۹}{۳}=\frac{۹!}{(۹-۳)!\times ۳!}=\frac{۹\times ۸\times ۷\times \cancel{۶!}}{\cancel{۶!}\times ۳\times ۲\times ۱}=۸۴$$

می‌خواهیم هر ۳ مهره همرنگ باشند یعنی هر ۳ سفید یا هر ۳ آبی باشند، لذا داریم:

$$n(A)=\binom{۴}{۳}+\binom{۵}{۳}$$
$$=\frac{۴!}{(۴-۳)!\times ۳!}+\frac{۵!}{(۵-۳)!\times ۳!}=\frac{۴\times \cancel{۳!}}{۱\times \cancel{۳!}}+\frac{۵\times ۴\times \cancel{۳!}}{۲!\times \cancel{۳!}}$$
$$=۴+۱۰=۱۴\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱۴}{۸۴}=\frac{۱}{۶}$$

۶۱

الف

می‌دانیم برای هر سکه ۲ حالت و برای هر تاس ۶ حالت وجود دارد. لذا می‌توان نوشت:

$$n(S)=\underset{\text{یک تاس}}{\underset{\downarrow}{۶^{۱}}}\times \underset{\text{دو سکه}}{\underset{\downarrow}{۲^{۲}}}=۲۴$$

ب

$$A=\{(۱,ر,ر)\}\Rightarrow n(A)=۱\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱}{۲۴}$$