



پاسخ سؤالات ۱ تا ۶

۱ پیشامد تصادفی

۲ ۱۲۰

۳ نسبت

۴  $A(0, 1)$ ۵ نیستند (زیرا عدد منفی نمی‌تواند به توان عددی کسری برسد؛ پس حاصل  $(-2)^{\frac{1}{3}}$  تعریف نشده است ولی عبارت  $\sqrt[3]{-2}$  تعریف شده است)

۶ -۵ ، ۱۰ ، -۱۰

$$۱۰۰ \text{ ریشه‌های دوم} = \pm\sqrt{100} = \pm 10$$

$$-۱۲۵ \text{ ریشه سوم} = \sqrt[3]{-125} = \sqrt[3]{-5^3} = -5$$

۷ هر جمله در دنباله حسابی از رابطه زیر به دست می‌آید، که در آن  $a_1$  جمله اول و  $d$  اختلاف مشترک است:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow 4^3 = 3 + (n-1) \times 4 \\ \Rightarrow 4^0 = 4(n-1) \Rightarrow n-1 = 10 \Rightarrow n = 11$$

پاسخ سؤالات ۸ تا ۹

$$P(A) = \frac{\binom{4}{3} + \binom{6}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{4 + 20}{120} = \frac{24}{120} = \frac{1}{5}$$

$$p(B) = \frac{\binom{4}{2} \binom{6}{1} + \binom{4}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{6 \times 6 + 4}{120} = \frac{36 + 4}{120} = \frac{40}{120} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{\binom{7}{0} \binom{5}{3} + \binom{7}{1} \binom{5}{2} + \binom{7}{2} \binom{5}{1}}{\binom{12}{3}} = \frac{185}{220} = \frac{37}{44}$$

راه حل دوم:

$$A \text{ متتم} \Rightarrow \text{هر ۳ مهره قرمز} \Rightarrow \frac{\binom{7}{3} \binom{5}{0}}{\binom{12}{3}} = \frac{35}{220} = \frac{7}{44}$$

$$P(A) = 1 - \frac{7}{44} = \frac{37}{44}$$

$$\begin{aligned} \frac{P(A)}{P(A')} &= \frac{2}{3} \\ \Rightarrow \frac{P(A)}{1 - P(A)} &= \frac{2}{3} \\ \Rightarrow P(A) &= \frac{2}{5} \end{aligned}$$

نسبت مربع‌های رنگی به تعداد کل مربع‌ها را در هر شکل به صورت یک دنباله می‌نویسیم:

$$1, \frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{6}{10}, \frac{9}{15}, \frac{12}{21}, \frac{16}{28}, \dots$$

دقت داشته باشید که غیر از جمله اول، مابقی جملات دو جمله دو جمله مساوی هستند:

$$1, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{6}, \frac{3}{6}, \frac{4}{9}, \frac{4}{9}, \dots$$

بر این اساس در جمله بیستم صورت کسر ۱۱ و مخرج کسر ۲۱ خواهد بود؛ پس:  $t_{20} = \frac{11}{21}$ 

جمله اول این دنباله ۱- و جمله چهارم آن برابر  $\frac{27}{8}$  است. باتوجه به اینکه در دنباله هندسی جمله  $n$ ام از رابطه  $a_n = a_1 q^{n-1}$  محاسبه می‌شود، با داشتن  $a_1$  و  $a_4$  می‌توان مقدار  $q$  یا همان قدر نسبت (نسبت مشترک) دنباله را به صورت زیر محاسبه کرد:

$$\begin{aligned} \frac{a_4}{a_1} &= \frac{\frac{27}{8}}{1} = -\frac{27}{8} = \frac{a_1 q^{4-1}}{a_1} = q^{4-1} = q^3 \\ q^3 &= -\frac{27}{8} \Rightarrow q = -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

مجموع  $n$  جمله اول دنباله هندسی از رابطه  $S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$  محاسبه می‌شود، پس مجموع شش جمله اول این دنباله برابر است با:

$$S_6 = \frac{-1 \left( 1 - \left( -\frac{3}{2} \right)^6 \right)}{1 - \left( -\frac{3}{2} \right)} = \frac{- \left( 1 - \left( \frac{729}{64} \right) \right)}{1 + \frac{3}{2}} = \frac{- \left( \frac{-645}{64} \right)}{\frac{5}{2}} = \frac{1333}{32}$$

پاسخ سؤال ۱۴

نادرست

$$\begin{cases} a_3 + a_4 = 20 \\ a_5 - a_3 = 6 \end{cases}$$

جملات را با هم می‌کنیم  $\rightarrow \begin{cases} (a_1 + 2d) + (a_1 + 3d) = 20 \Rightarrow 2a_1 + 5d = 20 \\ (a_1 + 4d) - (a_1 + 2d) = 6 \Rightarrow 2d = 6 \Rightarrow d = 3 \end{cases}$

حال مقادیر  $d$  را در رابطه اول قرار می‌دهیم:

$$2a_1 + 5d = 20 \xrightarrow{d=3} 2a_1 + 5(3) = 20$$

$$2a_1 = 20 - 15 \Rightarrow 2a_1 = 5 \Rightarrow a_1 = \frac{5}{2} = 2.5$$

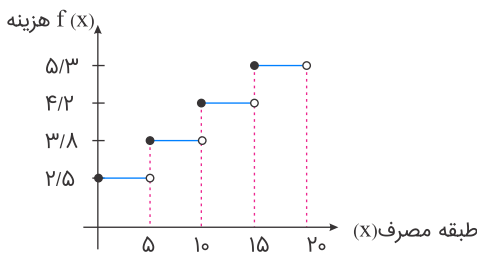
۴۱

$$\sqrt[5]{0/32}$$

$$C(10 - 2, 6 - 2) = C(\lambda, F) = \frac{\lambda!}{F! \lambda!} = 70$$

$$S_F = \frac{1(1 - F^6)}{1 - F} = 1365$$

نمی‌توان نظری داد، چون گزارش درصد باید همیشه با گزارش تعداد همراه باشد.

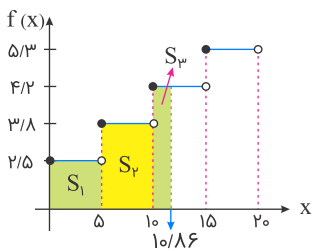


$$f(x) = \begin{cases} 2/5 & ; 0 \leq x < 5 \\ 3/8 & ; 5 \leq x < 10 \\ 4/2 & ; 10 \leq x < 15 \\ 5/3 & ; 15 \leq x < 20 \end{cases}$$

دامنه :  $D_f = \{x | x \in \mathbb{R}, 0 \leq x < 20\}$

برد :  $R_f = \{2/5, 3/8, 4/2, 5/3\}$

اگر طبقه مصرف ۱۰/۸۶ مترمکعب باشد، مساحت شکل زیر، مقدار آب‌بها را مشخص می‌کند. (مساحت را با حرف  $S$  نمایش می‌دهیم)



$$\begin{aligned} \text{آب‌بها} &= S_1 + S_2 + S_3 = (5 \times 2/5) + (5 \times 3/8) + (0.86 \times 4/2) \\ &= 12/5 + 19 + 3/612 = 35/112 \text{ ریال} \end{aligned}$$

الف ۱۶

ب

۱۷

۱۸

۱۹

الف ۲۰

ب

$$\begin{cases} a_1 = 10 \\ a_{n+1} = a_n + 7 \end{cases}$$

از آنجایی که هدف ما در ابتدا محاسبه  $t_n$  است، لذا از یک تغییر متغیر استفاده می‌کنیم:

$$t_{2n+1} = \frac{2n+3}{n-4}$$

$$2n+1 = a \Rightarrow 2n = a-1 \Rightarrow n = \frac{a-1}{2}$$

پس مقدار  $n$  را در عبارت دنباله جای‌گذاری می‌کنیم؛ در این صورت:

$$t_a = \frac{2\left(\frac{a-1}{2}\right) + 3}{\left(\frac{a-1}{2}\right) - 4} = \frac{a-1+3}{\frac{a-1-8}{2}} = \frac{2(a+2)}{a-9}$$

و از آنجایی که لازم است جمله عمومی دنباله برحسب  $n$  باشد، به جای تمام حروف  $a$  حرف  $n$  را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$t_n = \frac{2(n+2)}{n-9} \Rightarrow t_{15} = \frac{2(15+2)}{15-9} = \frac{2 \times 17}{6} = \frac{17}{3}$$

$$S = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$$

$$A = \{3, 9, 15\}$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{3}{8}$$

$t_n$  زمانی صحیح است که صورت آن بر مخرج آن بخش‌پذیر باشد. از آنجایی که ۱۹ عددی اول است، فقط دو شمارنده طبیعی ۱۹ و ۱ دارد. اما چون جملات صحیح مدنظر است می‌توان ۱۹ و -۱ را نیز در نظر گرفت.

$$3n+1 = 19 \Rightarrow 3n = 18 \Rightarrow n = 6 \in \mathbb{N} \quad \checkmark$$

$$3n+1 = -19 \Rightarrow 3n = -20 \Rightarrow n = \frac{-20}{3} \notin \mathbb{N} \quad \times$$

$$3n+1 = 1 \Rightarrow 3n = 0 \Rightarrow n = 0 \notin \mathbb{N} \quad \times$$

$$3n+1 = -1 \Rightarrow 3n = -2 \Rightarrow n = \frac{-2}{3} \notin \mathbb{N} \quad \times$$

پس فقط یک جمله صحیح دارد.

$$5040 \text{ یا } 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \text{ یا } 7!$$

الف

ب

$$1 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

$$a_3 = 5, \quad b_5 = 25, \quad c_7 = 2 \Rightarrow 5 + 25 + 2 = 32$$

$$a_4 = \frac{1}{4}, \quad a_5 = \frac{1}{5}, \quad a_6 = \frac{1}{6}, \quad a_7 = \frac{1}{7}$$

الف

ب

$$a_5 = \frac{a_1(1-r^5)}{1-r} = \frac{4\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^5\right)}{1-\left(\frac{1}{4}\right)} = \frac{31}{4}$$

$$n(S) = \binom{9}{3} = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1} = 12 \times 7 = 84$$

$$n(A) = \binom{4}{2} \times \binom{5}{1} + \binom{4}{3} = 6 \times 5 + 4 = 34$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{34}{84} = \frac{17}{42}$$

از هفت جمله موجود، ۴ جمله شماره فرد و ۳ جمله شماره زوج دارند: فرد  $S = S_{\text{زوج}}$   
 جملات فرد با  $a_1$  و جملات زوج با  $a_2$  شروع می‌شوند و  $d' = 2d$  که اختلاف مشترک دنباله‌های جدید است.

$$\frac{3}{2} (2a_2 + (3-1)d') = \frac{4}{2} (2a_1 + (4-1)d')$$

از طرفی داریم:  $a_2 = a_1 + d$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} (2a_1 + 2d + 2d') = 2(2a_1 + 3d')$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} (2a_1 + 6 + 12) = 2(2a_1 + 18)$$

$$\Rightarrow 3a_1 + 27 = 4a_1 + 36 \Rightarrow a_1 + 9 = 0 \Rightarrow a_1 = -9$$

$$\Rightarrow \text{دنباله حسابی: } -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9$$

پاسخ سؤال ۳۱

۳۱ درست

۳۲ الف

$$\begin{cases} a_{20} = 110 \\ a_{10} = 60 \end{cases} \xrightarrow{\text{جملات را باز می‌کنیم}} \begin{cases} a + 19d = 110 \\ a + 9d = 60 \end{cases} \times (-1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + 19d = 110 \\ -a - 9d = -60 \end{cases}$$

$$10d = 50 \Rightarrow d = 5 \xrightarrow{\text{جایگذاری در یکی از معادلات}} a + 9(5) = 60 \Rightarrow a = 15$$

$$a_{100} = a + 99d \xrightarrow{\substack{a=15 \\ d=5}} a_{100} = 15 + 99(5) = 510$$

$$S_n = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d] \xrightarrow{\substack{a=15, d=5 \\ n=100}} S_{100} = \frac{100}{2} [2(15) + 99(5)] = 26250$$

ب

پ

مجموعه تمام نتایج (برآمدهای) ممکن برای یک پدیده تصادفی را فضای نمونه آن پدیده می‌نامیم و با حرف  $S$  نمایش می‌دهیم.  
 به‌عنوان مثال در پرتاب یک سکه، فضای نمونه به‌صورت  $\{\text{رو, پشت}\}$  و  $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  است.

$$\frac{\binom{9}{3} \times \binom{2}{1}}{\binom{11}{4}} = \frac{84 \times 2}{330} = \frac{84}{165}$$

$$\frac{-\sqrt{(2a)^3} \times \sqrt{2}}{4\sqrt{2}} = \left(-\frac{1}{2^6}\right)^3 \Rightarrow \frac{2^a \times \sqrt{2}}{4\sqrt{2}} = -\frac{1}{2^{18}}$$

$$\Rightarrow 2^{a-2} = 2^{-18} \Rightarrow a = -16$$

پاسخ سؤالات ۳۶ تا ۳۷

$$x^2 = (\lambda + \sqrt{15})(\lambda - \sqrt{15}) = 64 - 15 = 49$$

$$x = \pm 7$$

$$t_n = 5 \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = 5 \times 5^{1-n} = 5^{2-n}$$

$$\frac{\binom{7}{2} \times \binom{3}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{\frac{7!}{2!5!} \times \frac{3!}{1!2!}}{\frac{10!}{3!7!}} = \frac{63}{120} = \frac{21}{40}$$

پاسخ سؤالات ۳۹ تا ۴۲

دامنهٔ میان چارکی

سوم یا گردآوری و پاکسازی داده‌ها

$$a_n = -n^2$$

$$a_4 = -\frac{1}{4}$$

یک فرد می‌تواند هر سه را باهم انتخاب کند، یعنی هم می‌تواند سوپ، هم پلو و هم سالاد را انتخاب کند. پس از اصل ضرب استفاده می‌کنیم:

$$\text{تعداد حالات‌ها} = 2 \times 4 \times 3 = 24$$

$$a_5 = 31 \Rightarrow a_1 + 4d = 31$$

$$a_2 = 13 \Rightarrow a_1 + d = 13$$

حال باید یک دستگاه دو معادله و دو مجهول را حل کنیم:

$$(-1) \times \begin{cases} a_1 + 4d = 31 \\ a_1 + d = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + 4d = 31 \\ -a_1 - d = -13 \end{cases} \xrightarrow{+} 3d = 18 \Rightarrow d = 6$$

$$a_1 + d = 13 \xrightarrow{d=6} a_1 + 6 = 13 \Rightarrow a_1 = 13 - 6 = 7$$

$$a_{10} = a_1 + 9d = 7 + 9(6) = 7 + 54 = 61$$

$$\xrightarrow{\text{مساحت هر ناحیه}} \binom{7}{7}, \binom{7}{6}, \binom{7}{5}, \binom{7}{4}, \binom{7}{3}, \binom{7}{2}, \binom{7}{1}, \binom{7}{0}, \dots$$

پس ضابطهٔ تابع به صورت  $y = \left(\frac{1}{p}\right)^x$  می‌باشد که  $x$  از مجموعهٔ اعداد حسابی انتخاب می‌شود (اعداد حسابی عبارت‌اند از ۰ و ۱ و ۲ و ۳ و ...). لذا ضابطهٔ کامل تابع به صورت زیر است:

$$\begin{cases} f: \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = \left(\frac{1}{p}\right)^x \end{cases}$$

$$f(x) = \left(\frac{1}{p}\right)^x \xrightarrow{x=8} f(x) = \left(\frac{1}{p}\right)^8 = \frac{1^8}{p^8} = \frac{1}{256}$$

$$f(x) = \left(\frac{1}{p}\right)^x \xrightarrow{f(x)=\frac{1}{81}} \left(\frac{1}{p}\right)^x = \frac{1}{81} \Rightarrow \left(\frac{1}{p}\right)^x = \left(\frac{1}{p}\right)^9 \Rightarrow x = 9$$

پاسخ سؤالات ۴۴ تا ۴۹

$7! = 5040$

$$\left. \begin{aligned} \Delta \times \underline{F} \times \frac{7!}{\underline{C}} &= 40 \\ \Delta \times \frac{7!}{\underline{C}} \times \underline{F} &= 40 \\ \frac{7!}{\underline{C}} \times \underline{F} \times \Delta &= 40 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 40 + 40 + 40 = 120$$

$P(5, 3) = \frac{5!}{2!} = 5 \times 4 \times 3 = 60$

کل جایگشت‌ها:  $7! = 5040$   
 جایگشت‌هایی که "شن" دارد:  $6! = 720$   
 جایگشت‌هایی که در آن "شن" دیده نمی‌شود:  $7! - 6! = 5040 - 720 = 4320$

$\frac{-1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{-1}{8}, \frac{1}{16}$

ابتدا چند جمله اول دنباله را تشکیل می‌دهیم:

$t_1 = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}, t_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}, t_3 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}, \dots, t_{15} = \frac{1}{15} - \frac{1}{16}$   
 $\Rightarrow t_1 + t_2 + \dots + t_{15} = (\frac{1}{1} - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + \dots + (\frac{1}{15} - \frac{1}{16})$   
 $= \frac{1}{1} - \frac{1}{16} = \frac{16-1}{16} = \frac{15}{16}$

$a_n = a_1 + (n-1)d \xrightarrow{d=F} a_n = 1 + (n-1)(F) \Rightarrow a_n = Fn - 3$

$a_n = Fn - 3 \Rightarrow Fn - 3 = F0 \Rightarrow Fn = F0 + 3 \Rightarrow Fn = F0F \Rightarrow n = \frac{F0F}{F} = 101$

$S_n = \frac{n \times (a_1 + a_n)}{2} = \frac{101 \times (1 + F01)}{2} = \frac{101 \times F02}{2} = 101 \times 201 = 20301$

یا:

$S_n = \frac{n \times (2a_1 + (n-1) \times d)}{2} = \frac{101 \times (2 \times 1 + (101-1) \times F)}{2} = \frac{101 \times (2 + F00)}{2} = \frac{101 \times F02}{2} = 101 \times 201 = 20301$

$f(t) = c(1+r)^t$   
 $f(t) = 5000000(1+0/1)^t \Rightarrow 5000000(1/1)^t = 60,500,000$

$a^5 > a^3$

$\sqrt[3]{a} > \sqrt[2]{a}$

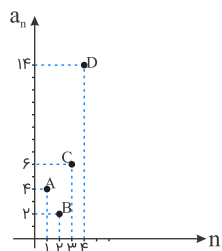
$n(S) = \binom{7}{2} = \frac{7!}{2! \times 5!} = 21$   
 $n(A) = \binom{6}{2} = 6 \quad P(A) = \frac{6}{21}$

$$n = 1 \xrightarrow{\text{ضابطه پایین}} a_1 = n + 3 = 1 + 3 = 4 \Rightarrow A(1, 4)$$

$$n = 2 \xrightarrow{\text{ضابطه بالا}} a_2 = n^2 - 2 = 2^2 - 2 = 2 \Rightarrow B(2, 2)$$

$$n = 3 \xrightarrow{\text{ضابطه پایین}} a_3 = n + 3 = 3 + 3 = 6 \Rightarrow C(3, 6)$$

$$n = 4 \xrightarrow{\text{ضابطه بالا}} a_4 = n^2 - 2 = 4^2 - 2 = 14 \Rightarrow D(4, 14)$$



$$\begin{cases} a_4 = 4 \\ S_{10} = 100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + 3d = 4 \\ \frac{10}{2}(2a_1 + 9d) = 100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + 3d = 4 \\ 10a_1 + 45d = 100 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -10a_1 - 30d = -40 \\ 10a_1 + 45d = 100 \end{cases}$$

$$15d = 60 \Rightarrow d = 4$$

$$a_1 + 3d = 4 \xrightarrow{d=4} a_1 + 3(4) = 4 \Rightarrow a_1 = 4 - 12 = -8$$

در ستون شماره دانش‌آموز، ۱۹ اشتباه ثبت شده است که شماره درست آن ۹ می‌باشد. در ستون جنسیت اعداد ۳ و ۵ نادرست‌اند. در ستون سن داده ۵۳ نادرست است. در ستون ورزش موردعلاقه داده ۷ نادرست است، چون ورزش‌ها از ۱ تا ۴ نام‌گذاری شده بودند. در ستون قد داده‌های (+) و ۱۲ نادرست هستند. در ستون وزن ۱۲۰۰ قطعاً نادرست است. ستون گروه خونی داده C نادرست است.

$$a - d + a + a + d = 21 \Rightarrow a = 7$$

$$(a - d)^2 + a^2 + (a + d)^2 = 219$$

$$\Rightarrow 3a^2 + 2d^2 = 219 \Rightarrow d^2 = 36 \Rightarrow d = \pm 6$$

سه عدد: ۱، ۷، ۱۳

پاسخ سؤالات ۶۰ تا ۶۲

$$4 \times 6! = 2880$$

$$\underbrace{\binom{4}{2}}_{(*)} \times 2! \times \underbrace{5!}_{\text{سایر افراد}}$$

(\*): انتخاب دو افسر و چیدن آنها در ابتدا و انتها

$$4! \times 3! = 24 \times 6 = 144$$