۱

$$x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+xz \Leftrightarrow 2x^2+2y^2+2z^2 \geq 2xy+2yz+2xz$$
$$\Leftrightarrow (x^2+y^2-2xy)+(y^2+z^2-2yz)+(x^2+z^2-2xz) \geq 0$$
$$\Leftrightarrow (x-y)^2+(y-z)^2+(x-z)^2 \geq 0$$

چون نابرابری آخری همواره درست است پس با بازگشت روابط، حکم برقرار است.

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته شهریور ۱۳۹۸

پاسخ سؤالات ۲ تا ۵

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته شهریور ۱۴۰۰

۲ درست

۳ نادرست

۴ درست

۵ نادرست

پاسخ سؤالات ۶ تا ۷

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته شهریور ۱۳۹۸

۶ درست است.

۷ نادرست است.

۸

$$b=2k\ ,\ b|a+2 \Rightarrow a+2=bq \Rightarrow a=2t$$

که با فرض سؤال در تناقض است.

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته شهریور ۱۴۰۲

۹

$$2^5 \overset{10}{\equiv} 2 \Rightarrow 2^{10} \overset{10}{\equiv} 2^2 \Rightarrow 2^{11} \overset{10}{\equiv} 8 \Rightarrow 2^{11}+7 \overset{10}{\equiv} 15 \overset{10}{\equiv} 5$$

رقم یکان برابر ۵ است.

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته شهریور ۱۳۹۹

۱۰

$$\begin{matrix} a = 6q + 3 \\ a = 7q' + 5 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} 7a = 42q + 21 \\ 6a = 42q' + 30 \end{matrix} \Rightarrow a = 42(q - q' - 1) + 33 \Rightarrow r = 33$$

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته شهریور ۱۴۰۱

۱۱

برای درک بهتر مسئله، مثالی ارائه می‌کنیم. a_1، a_2 و a_3 را به‌ترتیب ۵، ۸ و ۱ در نظر می‌گیریم و b_1، b_2 و b_3 را ۸، ۱ و ۵ در نظر می‌گیریم، داریم:

$$(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(a_3 - b_3) = (5 - 8)(8 - 1)(1 - 5) = (-3)(7)(-4) = 84$$

اگر $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(a_3 - b_3)$ زوج نباشد (فرض خلف)، پس عددی فرد است. پس هر سه عامل $a_1 - b_1$، $a_2 - b_2$ و $a_3 - b_3$ هم باید فرد باشند، زیرا اگر یکی از آن‌ها زوج باشد، حاصل‌ضربشان هم زوج می‌شود. درنتیجه مجموع آن‌ها هم باید عددی فرد باشد، یعنی $(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + (a_3 - b_3)$ باید عددی فرد باشد. اما مجموع این سه عبارت صفر است. پس فرض خلف باطل و حکم اثبات می‌شود.

کتاب درسی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته مثال

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته شهریور ۱۴۰۱

۱۲

$$2x \overset{5}{\equiv} 19 \overset{5}{\equiv} 4 \xrightarrow{(2,5)=1} x \overset{5}{\equiv} 2$$

$$\Rightarrow x = 5k + 2 \Rightarrow y = -2k + 3$$

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته شهریور ۱۳۹۹

۱۳

عدد nرقمی $A = \overline{a_{n-1}a_{n-2}...a_2a_1a_0}$ را بسط می‌دهیم و در همنهشتی به پیمانهٔ ۹ به‌جای هر توان ۱۰، عدد ۱ را قرار می‌دهیم.

$$A = 10^{n-1} \times a_{n-1} + 10^{n-2} \times a_{n-2} + ... + 10^2 a_2 + 10^1 a_1 + 10^0 a_0$$

$$\Rightarrow A \overset{9}{\equiv} 1 \times a_{n-1} + 1 \times a_{n-2} + 1 \times a_{n-3} + ... + 1 \times a_1 + 1 \times a_0$$

$$\Rightarrow A \overset{9}{\equiv} a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} + ... + a_1 + a_0$$

کتاب درسی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته فعالیت

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته شهریور ۱۴۰۱

۱۴

$$\begin{cases} a|5k + 9 \\ a|8k + 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a|40k + 72 \\ a|40k + 65 \end{matrix} \Rightarrow a|7 \Rightarrow a = 1 \vee a = 7$$

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته شهریور ۱۴۰۱

۱۵

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته شهریور ۱۴۰۲

الف نادرست

ب نادرست

پ درست

ت درست

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته شهریور ۱۳۹۸

۱۶

$$\forall m > ۰ \;,\; a|m \;,\; b|m \Rightarrow c \leq m$$

۱۷

$$۵x + ۳y = ۴۲ \Rightarrow ۵x \overset{۳}{\equiv} ۴۲ \overset{۳}{\equiv} ۰ \Rightarrow x \overset{۳}{\equiv} ۰ \Rightarrow x = ۳k \Rightarrow ۵(۳k) + ۳y = ۴۲ \Rightarrow y = -۵k + ۱۴$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ y = ۱۴ \end{cases} ; \begin{cases} x = ۳ \\ y = ۹ \end{cases} ; \begin{cases} x = ۶ \\ y = ۴ \end{cases}$$

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته شهریور ۱۴۰۱

۱۸

هرگاه p را بر ۶ تقسیم کنیم، خواهیم داشت:

$$\left.\begin{array}{l} (۱): \; p = ۶k \,,\, (۲): \; p = ۶k + ۱, \, (۳): \; p = ۶k + ۲ = ۲\,(۳k + ۱) \\ (۴): \; p = ۶k + ۳ = ۳\,(۲k + ۱)\,,\, (۵): p = ۶k + ۴ = ۲\,(۳k + ۲)\,,(۶): p = ۶k + ۵ \end{array}\right\} (۰/۷۵)$$

در حالات (۱)، (۳) و (۵) زوج و در (۴) بر ۳ بخش‌پذیر است(۰/۲۵) که با اول بودن p تناقض دارد (۰/۲۵). بنابراین فقط در حالات (۲) یا (۶)، p می‌تواند عددی اول باشد که حکم اثبات می‌شود (۰/۲۵).

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته شهریور ۱۳۹۹

۱۹

$$a|۹(۵k + ۳) - ۵(۹k + ۴) \Rightarrow a|۲۷ - ۲۰ \Rightarrow a|۷ \xrightarrow{a>۱} a = ۷ \in P$$

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته شهریور ۱۴۰۰

۲۰

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته شهریور ۱۴۰۱

الف نادرست، مثال نقض $n = ۳$

ب درست، اثبات:

$$a = ۲k + ۱ \Rightarrow a^۲ = (۲k + ۱)^۲ = ۲(۲k^۲ + ۲k) + ۱ = ۲k' + ۱$$

۲۱

$$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow m\,|a - b \Rightarrow m\,|(a - b)\,(a^{n-۱} + a^{n-۲}b + ... + b^{n-۱})$$

$$\Rightarrow m\,|a^n - b^n \Rightarrow a^n \overset{m}{\equiv} b^n$$

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته شهریور ۱۳۹۹

۲۲

$$۶۳ \overset{۱۶}{\equiv} -۱ \Rightarrow ۶۳^{۱۴} \overset{۱۶}{\equiv} ۱ \Rightarrow A \overset{۱۶}{\equiv} ۲ \Rightarrow r = ۲$$

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته شهریور ۱۴۰۲

۲۳

$$2x^2 + 2xy + y^2 \geq 4x - 4 \Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 + x^2 - 4x + 4 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x + y)^2 + (x - 2)^2 \geq 0$$

این رابطه همواره برقرار است.

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته شهریور ۱۴۰۲

پاسخ سؤالات ۲۴ تا ۲۷

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته شهریور ۱۳۹۹

۲۴ نادرست

۲۵ درست

۲۶ نادرست

۲۷ نادرست

۲۸ فاصله ۱ مهر تا ۱۲ بهمن برابر است با: ۲۹ روز در مهرماه و سه ماه آبان، آذر و دی و ۱۲ روز تا ۱۲ بهمن، یعنی $131 = 12 + 30 \times 3 + 29$. ازطرفی $131 \overset{7}{\equiv} 5$. بنابراین طبق جدول زیر ۱۲ بهمن پنجشنبه است.

ش	ی	د	س	چ	پ	ج
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته خرداد ۱۴۰۱
کتاب درسی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته فعالیت
امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته خرداد ۱۳۹۸

پاسخ سؤالات ۲۹ تا ۳۲

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته خرداد ۱۴۰۱

۲۹ نادرست

۳۰ درست

۳۱ درست

۳۲ نادرست

۳۳

$$x^{۲}+y^{۲}+۱\geq ۲xy-z^{۲}\Leftrightarrow x^{۲}+y^{۲}-۲xy+z^{۲}+۱\geq ۰$$
$$\Leftrightarrow (x-y)^{۲}+z^{۲}+۱\geq ۰$$

همواره بدیهی است.

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته خرداد ۱۴۰۲

۳۴

$$xy\leq \frac{x^{۲}+y^{۲}}{۲}\Leftrightarrow ۲xy\leq x^{۲}+y^{۲}\Leftrightarrow x^{۲}+y^{۲}-۲xy\geq ۰\Leftrightarrow (x-y)^{۲}\geq ۰$$

گزاره همواره درست است.

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته خرداد ۱۴۰۰

۳۵

$$\begin{array}{l} m=۱۳q_{۱}+۲ \\ n=۱۳q_{۲}+۹ \end{array}\Rightarrow \begin{array}{l} ۳m=۱۳(۳q_{۱})+۶ \\ ۵n=۱۳(۵q_{۲})+۴۵ \end{array}\Rightarrow ۵n-۳m=۱۳q'+۳۹$$
$$\Rightarrow ۵n-۳m=۱۳q''+۰\Rightarrow r=۰$$

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته خرداد ۱۳۹۸

۳۶

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq ۲\Leftrightarrow \frac{x^{۲}+y^{۲}}{xy}\geq ۲\Leftrightarrow x^{۲}+y^{۲}\geq ۲xy\Leftrightarrow (x-y)^{۲}\geq ۰$$

چون رابطهٔ آخر درست است، پس با بازگشت روابط، حکم مسئله درست می‌باشد.

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته خرداد ۱۳۹۹

پاسخ سؤالات ۳۷ تا ۳۸

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته خرداد ۱۴۰۲

۳۷ درست

۳۸ درست

۳۹

$$۱۵x\overset{۱۹}{\equiv}۷\Rightarrow ۱۵x\overset{۱۹}{\equiv}۴۵\xrightarrow{(۱۵,۱۹)=۱}x\overset{۱۹}{\equiv}۳\Rightarrow x=۱۹k+۳\xrightarrow{k=۵}x=۹۸$$

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته خرداد ۱۴۰۲

۴۰

$$۲y\overset{۵}{\equiv}۱۸\xrightarrow{(۲,۵)=۱}y\overset{۵}{\equiv}۹\overset{۵}{\equiv}۴\Rightarrow y=۵k+۴$$
$$\Rightarrow ۵x+۲(۵k+۴)=۱۸\Rightarrow x=-۲k+۲$$

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته شهریور ۱۴۰۰

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته خرداد ۱۳۹۸

پاسخ سؤالات ۴۱ تا ۴۲

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته خرداد ۱۴۰۰

۴۱ درست

۴۲ نادرست

۴۳

$$n = ۲k \Rightarrow n^{۲} - ۵n + ۷ = ۴k^{۲} - ۱۰k + ۶ + ۱ = ۲(۲k^{۲} - ۵k + ۳) + ۱ = ۲q + ۱$$

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته خرداد ۱۴۰۱

۴۴ اگر a و b دو عدد نامنفی باشند، حکم ما چنین خواهد بود: $\dfrac{a+b}{۲} \geq \sqrt{ab}$.

$$\frac{a+b}{۲} \geq \sqrt{ab} \Leftrightarrow a + b \geq ۲\sqrt{ab}$$

$$\Leftrightarrow a + b - ۲\sqrt{ab} \geq ۰ \Leftrightarrow (\sqrt{a} - \sqrt{b})^{۲} \geq ۰$$ گزاره همیشه درست

کتاب درسی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته مثال

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته خرداد ۱۳۹۸

۴۵

$$a = ۴q + ۳ \Rightarrow ۲a + ۳ = ۸q + ۹ = ۸(q + ۱) + ۱ = ۸q' + ۱ \Rightarrow r = ۱$$

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته خرداد ۱۳۹۹

پاسخ سؤالات ۴۶ تا ۴۷

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته خرداد ۱۴۰۰

۴۶ عدد a شمارندهٔ عدد b است.

۴۷ $۲m$

۴۸

$$۲۷ = ۱۳ \times ۲ + ۱ \Rightarrow ۲۷ \overset{۱۳}{\equiv} ۱ \Rightarrow (۲۷)^{۲۰} \overset{۱۳}{\equiv} ۱,\ ۱۸ = ۱۳ \times ۱ + ۵,\ ۱۸ \overset{۱۳}{\equiv} ۵$$

$$\Rightarrow (۲۷)^{۲۰} + ۱۸ \overset{۱۳}{\equiv} ۱ + ۵ \Rightarrow r = ۶$$

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته خرداد ۱۴۰۱

۴۹

$$۲ \overset{۱۱}{\equiv} ۳۵ \Rightarrow ۵x \overset{۱۱}{\equiv} ۳۵ \xrightarrow{(۵,۱۱)=۱} x \overset{۱۱}{\equiv} ۷ \Rightarrow x = ۱۱k + ۷$$

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته خرداد ۱۳۹۹

۵۰

$$۱۰۰۰ \overset{۷}{\equiv} -۱ \Rightarrow (۱۰۰۰)^{۲۵} \times ۹ + ۱۱ \overset{۷}{\equiv} (-۱)^{۲۵} \times ۹ + ۱۱ \overset{۷}{\equiv} ۲ \Rightarrow r = ۲$$

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته خرداد ۱۴۰۰

۵۱

$$\begin{cases} n \mid (۹k + ۷) \times (-۷) \\ n \mid (۷k + ۶) \times ۹ \end{cases} \Rightarrow n \mid -۶۳k - ۴۹ + ۶۳k + ۵۴ \Rightarrow n \mid ۵ \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} n = ۱ \text{ یا } ۵$$

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته خرداد ۱۳۹۹

۵۲

$$۷^{۲} = ۴۹ \overset{۱۵}{\equiv} ۴ \Rightarrow ۷^{۴} \overset{۱۵}{\equiv} ۱۶ \overset{۱۵}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۷^{۲۸} \overset{۱۵}{\equiv} ۱ \xrightarrow{\times ۷^{۲} \overset{۱۵}{\equiv} ۴} ۷^{۳۰} \overset{۱۵}{\equiv} ۴$$

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته خرداد ۱۳۹۹

۵۳

$$\begin{cases} a = ۵q_{۱} + ۴ \xrightarrow{\times ۴} ۴a = ۲۰q_{۱} + ۱۶ \\ a = ۴q_{۲} + ۳ \xrightarrow{\times ۵} ۵a = ۲۰q_{۲} + ۱۵ \end{cases} \xrightarrow{-} a = ۲۰q' - ۱ \Rightarrow ۲۰q'' + ۱۹$$

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته خرداد ۱۴۰۲

پاسخ سؤالات ۵۴ تا ۵۵

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته خرداد ۱۳۹۹

۵۴ نادرست

$$\sqrt{۲}, -\sqrt{۲} \in Q^{C} \quad , \quad \sqrt{۲} + \left(-\sqrt{۲}\right) = ۰ \notin Q^{C}$$

۵۵ درست

$$(۲k + ۱)^{۲} - ۱ = ۴k^{۲} + ۴k + ۱ - ۱ = ۴k\,(k + ۱) = ۴ \times ۲q = ۸q$$

۵۶

$$\begin{cases} ۵|۴k + ۱ \Rightarrow ۲۵|۱۶k^{۲} + ۸k + ۱ \\ ۵|۴k + ۱ \Rightarrow ۲۵|۲۰k + ۵ \end{cases} \xrightarrow{+} ۲۵|۱۶k^{۲} + ۲۸k + ۶$$

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته خرداد ۱۴۰۱

۵۷

$$\begin{cases} a|۲m + ۳ \\ a|m + ۷ \end{cases} \xrightarrow{\times ۲} \begin{cases} a|۲m + ۳ \\ a|۲m + ۱۴ \end{cases} \Rightarrow a|۱۱ \Rightarrow a = ۱,\ a = ۱۱$$

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته خرداد ۱۴۰۲

۵۸

$$۷x \overset{۴}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۷x \overset{۴}{\equiv} ۴ \times ۵ + ۱ \Rightarrow ۷x \overset{۴}{\equiv} ۲۱ \overset{(۷,۴)=۱}{\Rightarrow} x \overset{۴}{\equiv} ۳ \Rightarrow x = ۴k + ۳$$

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته خرداد ۱۴۰۰

۵۹

$$p = ۴k \quad (۱) \quad , \quad p = ۴k + ۱ \quad (۲)$$

$$p = ۴k + ۲ = ۲(۲k + ۱) \quad (۳) \quad , \quad p = ۴k + ۳ \quad (۴)$$

در حالت (۱) و (۳)، p عددی زوج است که با اول‌بودن آن تناقض دارد. بنابراین اعداد اول به فرم (۲) یا (۴) خواهند بود.

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته خرداد ۱۴۰۰

۶۰

$$a+\frac{1}{a}\geq 2 \Leftrightarrow a^2+1\geq 2a \Leftrightarrow a^2-2a+1\geq 0 \Leftrightarrow (a-1)^2\geq 0$$

عبارت بالا همواره برقرار است، پس با برگشت روابط حکم برقرار می‌باشد.

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته دی ۱۳۹۸

پاسخ سؤالات ۶۱ تا ۶۲

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته دی ۱۳۹۷

۶۱ a عددی فرد است، بنابراین $a+2$ عددی فرد است و $b|a+2$، بنابراین b نیز عددی فرد خواهد بود. $(0/25)$
می‌دانیم مربع هر عدد فرد، مضربی از عدد ۸ به‌علاوهٔ یک است. $(0/25)$

$$a^2+b^2+3=\underset{(0/25)}{(8m+1)+(8n+1)}+3=\underset{(0/25)}{8(m+n)}+5 \Rightarrow r=5 \quad (0/25)$$

۶۲

$$1000\overset{7}{\equiv}6\overset{7}{\equiv}-1 \Rightarrow (1000)^{13}\times 12+10\overset{7}{\equiv}-12+10$$
$$\Rightarrow (1000)^{13}\times 12+10\overset{7}{\equiv}-2\overset{7}{\equiv}5 \Rightarrow r=5$$

پاسخ سؤالات ۶۳ تا ۶۴

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته دی ۱۴۰۱

۶۳ m^2

۶۴ نسبت به هم اول

۶۵

$$A=21a^2=3\times 7\times a^2 \quad , \quad B=35a^3=5\times 7\times a^3 \Rightarrow [A,B]=105a^3$$

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته دی ۱۳۹۸

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته دی ۱۴۰۰

۶۶

الف گنگ

ب $a|mb$

پ $|a|$

ت $a\overset{\frac{m}{d}}{\equiv}b$

۶۷

$$y^2+1\geq -2x(y+x+1) \Leftrightarrow x^2+y^2+2xy+x^2+2x+1\geq 0$$
$\Leftrightarrow (x+1)^2+(x+y)^2\geq 0 \Rightarrow$ این رابطهٔ بازگشتی همواره بدیهی است

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته دی ۱۴۰۱

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته دی ۱۳۹۷

۶۸ درست

۶۹ درست

۷۰

$$a = ۲k + ۱ \Rightarrow a^۲ = ۴k^۲ + ۴k + ۱ = ۴\underbrace{k(k+۱)}_{\text{ضرب دو عدد صحیح متوالی}} + ۱ = ۴ \times ۲q + ۱ = ۸q + ۱ \Rightarrow r = ۱$$

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته دی ۱۴۰۰

۷۱

$$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow m|a - b \Rightarrow m|c\,(a - b) \Rightarrow m|ac - bc \Rightarrow ac \overset{m}{\equiv} bc$$

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته دی ۱۳۹۸

۷۲

$$a = bq + r\ , ۰ \leq r < b \Rightarrow a - bq = r \Rightarrow \begin{cases} n|a \\ n|b \end{cases} \Rightarrow n|a - bq \Rightarrow n|r$$

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته دی ۱۴۰۰

۷۳

$$۳۸ \overset{۴}{\equiv} ۲ \Rightarrow ۳۸^۲ \overset{۴}{\equiv} ۴ \overset{۴}{\equiv} ۰ \Rightarrow ۳۸^{۳۶} \overset{۴}{\equiv} ۰\ ,\ ۱۹ \overset{۴}{\equiv} ۳ \Rightarrow ۳۸^{۳۶} + ۱۹ \overset{۴}{\equiv} ۳$$

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته دی ۱۳۹۹

۷۴

$$(۵a + ۴, ۲a + ۳) = d \Rightarrow \begin{cases} d|۲a + ۳ \\ d|۵a + ۴ \end{cases}$$

$$\Rightarrow d| - ۲(۵a + ۴) + ۵(۲a + ۳)$$

$$d|۷ \Rightarrow d = ۱ \text{یا} ۷$$

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته دی ۱۳۹۹

پاسخ سؤالات ۷۵ تا ۷۷

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته دی ۱۴۰۱

۷۵ درست

۷۶ نادرست

۷۷ نادرست

۷۸

$$\begin{matrix} a|۴k+۹ \\ a|۶k+۱۴ \end{matrix} \Rightarrow a|-۶(۴k+۹)+۴(۶k+۱۴) \Rightarrow a|۲ \xrightarrow{a>۱} a=۲$$

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته دی ۱۳۹۸

۷۹

می‌دانیم مربع هر عدد فرد، به‌صورت $۸k+۱$ می‌باشد $(k \in \mathbb{Z})$ پس داریم:

$$\begin{cases} a^۲=۸k+۱ \\ b^۲=۸k'+۱ \end{cases} \Rightarrow a^۲+b^۲+۵=۸k+۱+۸k'+۱+۵ \Rightarrow a^۲+b^۲+۵=۸k''+۷$$

$$\Rightarrow r=۷$$

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته دی ۱۴۰۱

۸۰

$$\begin{matrix} a\,|۹k+۴ \\ a\,|۵k+۳ \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} a\,|۴۵k+۲۰ \\ a\,|۴۵k+۲۷ \end{matrix} \Rightarrow a|۷ \xrightarrow{a>۱} a=۷$$

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته دی ۱۳۹۷

۸۱

فرض خلف: فرض کنیم $\alpha-\beta$ گویا باشد. می‌دانیم جمع دو عدد گویا عددی گویا است، پس $(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta) \in \mathbb{Q}$؛ یعنی $۲\alpha \in \mathbb{Q}$. درنتیجه $\alpha \in \mathbb{Q}$ و این با فرض گنگ بودن α تناقض دارد. پس فرض خلف باطل و حکم اثبات می‌شود.

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته دی ۱۴۰۰

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته دی ۱۳۹۹

۸۲

$$a=۱۷q+۵$$

$$b=۱۷q'+۳$$

$$\Rightarrow ۲a-۵b=۱۷\times۲q+۱۰-۱۷\times۵q'-۱۵$$

$$=۱۷\overbrace{(۲q-۵q'-۱)}^{k\in\mathbb{Z}}+۱۲=۱۷k+۱۲ \Rightarrow r=۱۲$$

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته دی ۱۳۹۹

۸۳

$$۱۳\overset{۱۷}{\equiv}-۴ \Rightarrow ۱۳^۲\overset{۱۷}{\equiv}۱۶\overset{۱۷}{\equiv}-۱ \Rightarrow ۱۳^{۳۲}\overset{۱۷}{\equiv}-۱ \xrightarrow{-۱\overset{۱۷}{\equiv}۱۶} r=۱۶$$

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته دی ۱۳۹۸

پاسخ سؤالات ۸۴ تا ۸۵

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته دی ۱۳۹۸

۸۴ درست

۸۵ نادرست

۸۶

$$6x \overset{7}{\equiv} 185 = 23 \times 7 + 24 \Rightarrow 6x \overset{7}{\equiv} 24 \xrightarrow{(6,7)=1} x \overset{7}{\equiv} 4 \Rightarrow x = 7k + 4 \ , k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \ 6(7k+4) + 7y = 185 \Rightarrow y = -6k + 23 \ , k \in \mathbb{Z}$$

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته دی ۱۴۰۰

۸۷

$$13y \overset{9}{\equiv} 7, (13 \overset{9}{\equiv} 4, 7 \overset{9}{\equiv} 16) \Rightarrow 4y \overset{9}{\equiv} 16 \xrightarrow{(4,9)=1} y \overset{9}{\equiv} 4$$
$$y = 9k + 4, 9x = 7 - 13(9k+4) = -117k - 45 \Rightarrow x = -13k - 5$$

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته دی ۱۳۹۸

۸۸

$$3x \overset{7}{\equiv} 13 \Rightarrow 3x \overset{7}{\equiv} 6 \xrightarrow{(3,7)=1} x \overset{7}{\equiv} 2 \Rightarrow x = 7k + 2$$

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته دی ۱۳۹۷

پاسخ سؤالات ۸۹ تا ۹۱

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته دی ۱۳۹۹

۸۹ نادرست

$$n = 4 \quad \Rightarrow \quad 2^4 - 1 = 15 \notin P$$

۹۰ درست

۹۱ نادرست

معادلهٔ همنهشتی $ax \overset{m}{\equiv} b$ دارای جواب است اگروتنهااگر $(a,m)|b$.

۹۲ می‌دانیم $1! \overset{15}{\equiv} 1$، $2! \overset{15}{\equiv} 2$، $3! \overset{15}{\equiv} 6$، $4! \overset{15}{\equiv} 9$، $5! \overset{15}{\equiv} 0$ و ... و $200! \overset{15}{\equiv} 0$؛ پس داریم:

$$1! + 2! + 3! + 4! + 5! + \cdots + 200! \overset{15}{\equiv} 1 + 2 + 6 + 24 + 0 + 0 + 0 + \cdots + 0 \overset{15}{\equiv} 3$$

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته دی ۱۴۰۱

۹۳

$$2x^2 + 2y^2 + 2 \geq 2xy + 2x + 2y$$
$$\Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 2y + 1) + (x^2 - 2xy + y^2) \geq 0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 + (x-y)^2 \geq 0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^2 \geq 0 \ , \ (y-1)^2 \geq 0 \ , \ (x-y)^2 \geq 0$$

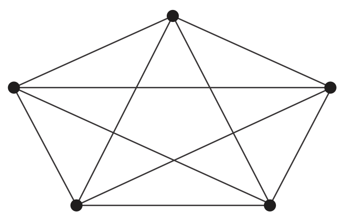
امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته دی ۱۳۹۷
کتاب درسی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته تمرین

منبع:

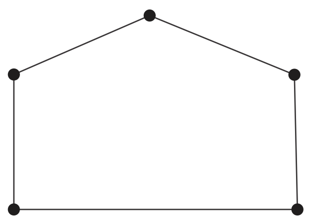
۱

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته شهریور ۱۳۹۸

الف



ب



۲

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته شهریور ۱۴۰۲

الف

مرتبه $p = 7$, اندازه $q = 6$

ب

$$\sum \deg(v_i) = 2q = 12$$

پ

$$N_G[c] = \{a, c, d, e\}$$

ت

acefa

ث

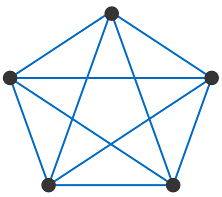
$$q(G) + q(\overline{G}) = \frac{n(n-1)}{2} = 21 \Rightarrow q(\overline{G}) = 15$$

$$\deg_G(g) + \deg_{\overline{G}}(g) = n - 1 = 6 \Rightarrow \deg_{\overline{G}}(g) = 6$$

$$q(\overline{G}) + \deg_{\overline{G}}(g) = 15 + 6 = 21$$

۳

$$\frac{p(p-۱)}{۲} = ۱۰\,(۰/۲۵) \Rightarrow p^۲ - p - ۲۰ = ۰\,(۰/۲۵) \Rightarrow p = ۵\ \ (۰/۲۵)$$



رسم گراف $(۰/۲۵)$

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته شهریور ۱۳۹۹

۴

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته شهریور ۱۴۰۱

الف $\{g, c\} \Rightarrow \gamma(G) = ۲$

ب $\{h, d, b\}$

پاسخ سؤالات ۵ تا ۸

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته شهریور ۱۴۰۲

۵ همبند

۶ زوج

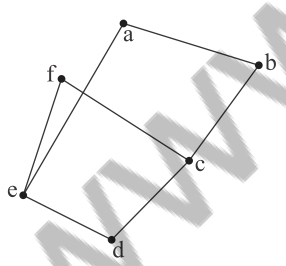
۷ $p - ۱$

۸ k- منتظم

۹

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته شهریور ۱۳۹۸

الف



ب $N_G[b] = \{a, b, c\}$

پ b, a, e, f, c, d

۱۰ باتوجه‌به $\left\lceil \frac{8}{3+1} \right\rceil = 2$ داریم $\gamma(G) \geq 2$. (۰/۲۵) لذا حداقل عدد احاطه‌گری ۲ است (۰/۲۵). از طرفی $\{e,c\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر است (۰/۵). پس $\gamma(G) \leq 2$ (۰/۲۵)، درنتیجه $\gamma(G) = 2$ (عدد احاطه‌گری)(۰/۲۵).

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته شهریور ۱۳۹۹

۱۱

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته شهریور ۱۴۰۲

الف

$$\gamma(G) \geq [\frac{p}{\Delta+1}] \Rightarrow \gamma(G) \geq 3 \quad (\star)$$

ازطرفی $A = \{a,e,f\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر است، بنا به رابطهٔ (*) پس: $\gamma(G) = 3$

ب

$$B = \{a,d,g,h,i,j,k,l\}$$

پ

$$C = \{a,e,f,b\}$$

پاسخ سؤالات ۱۲ تا ۱۶

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته شهریور ۱۴۰۰

۱۲ abgc

۱۳ bcdgb

۱۴ ۵

۱۵ خیر، زیرا دارای رأس ایزوله است، هیچ مسیری به سایر رئوس وجود ندارد.

۱۶

$$N_G(f) = \{\}$$

پاسخ سؤالات ۱۷ تا ۱۸

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته شهریور ۱۳۹۸

۱۷ همبند

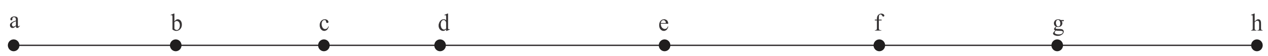
۱۸

$$\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil$$

۱۹

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته شهریور ۱۳۹۸

الف



ب $\{a, d, g\}$

پ $\{a, d, e, h\}$

۲۰ امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته شهریور ۱۴۰۱

الف abgc

ب bcdgb

پ ۵

ت خیر، زیرا دارای رأس ایزوله است. (هیچ مسیری از f به سایر رئوس وجود ندارد)

ث $N_G[f] = \{f\}$

۲۱ امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته شهریور ۱۳۹۹

الف $\delta(G) = ۰ \ , \ \Delta(G) = ۴ \ (۰/۵)$

ب $c, a, b, c \ (۰/۲۵) \ , \ c, a, e, c \ (۰/۲۵) \ , \ c, e, d, c \ (۰/۲۵)$

پ $\Delta(\bar{G}) = ۵ \ (۰/۲۵)$

ت $N_G(e) = \{a, c, d\} \ (۰/۷۵)$

ث خیر $(۰/۲۵)$

۲۲ طبق قضیه داریم $\gamma(G) \geq ۲ = \left\lceil \frac{۷}{۴+۱} \right\rceil$. ازطرفی مجموعهٔ $D = \{b, e\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر است. لذا $\gamma(G) \leq ۲$. بنابراین $\gamma(G) = ۲$.

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته شهریور ۱۴۰۰

۲۳ وجود ندارد $(۰/۲۵)$. زیرا:

$$\sum_{i=1}^{۷} \deg v_i = ۲q \ (۰/۲۵) \Rightarrow ۳ \times ۷ = ۲q \ (۰/۲۵) \Rightarrow \text{فرد}\ ۲۱ = ۲q\ \text{زوج} \ (۰/۲۵)$$

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته شهریور ۱۳۹۹

۲۴ امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته خرداد ۱۳۹۸

الف $p = ۶ \ , \ q = ۷$

ب $N_G(b) = \{a, d, c\}$

پ

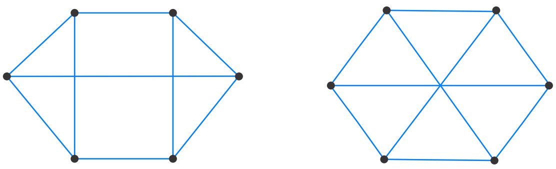
$$\bar{G}\ \text{تعداد یال‌های گراف} + G\ \text{تعداد یال‌های گراف} = \frac{p(p-۱)}{۲}$$

$$\bar{G}\ \text{تعداد یال‌های گراف} = ۸ \Rightarrow \bar{G}\ \text{مجموع درجه‌های رئوس گراف} = ۱۶$$

۲۵ امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته خرداد ۱۳۹۹

الف $۳ \times ۶ = ۲q \Rightarrow q = ۹$

ب رسم یکی از گراف‌های زیر کافی است.



۲۶ امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته خرداد ۱۴۰۲

الف $\{f\}$

ب abcdea یا abdefa

پ ۴

پاسخ سؤالات ۲۷ تا ۲۹

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته خرداد ۱۳۹۸

۲۷ ۲۸

۲۸ ۳

۲۹ $p - ۱$

پاسخ سؤالات ۳۰ تا ۳۳

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته خرداد ۱۴۰۱

۳۰ فرد

۳۱ تهی

۳۲ ۶

۳۳ همبند

۳۴ اگر $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر غیرمینیمال باشد، در این صورت یک یا چند عضو وجود دارند که با حذف آن‌ها مجموعه احاطه‌گر مینیمال باقی می‌ماند. بنابراین عضوی مانند a_1 را در نظر می‌گیریم اگر با حذف آن هنوز مجموعه احاطه‌گر باقی بماند، آن را حذف می‌کنیم، در غیر این صورت آن را نگه داشته و همین کار را برای سایر رئوس انجام می‌دهیم.

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته خرداد ۱۳۹۸

۳۵ مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم مجموعهٔ احاطه‌گری است که کمترین تعداد عضو را دارد ولی مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال مجموعهٔ احاطه‌گری است که با حذف هریک از رئوس آن دیگر احاطه‌گر نیست و می‌تواند از مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم بیشتر عضو داشته باشد.

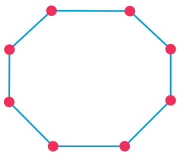
امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته خرداد ۱۴۰۰

۳۶

$$D = \{۲, ۵, ۸\}$$

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته خرداد ۱۴۰۱

۳۷



امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته خرداد ۱۴۰۲

۳۸

$$\begin{cases} q = \dfrac{kn}{۲} \Rightarrow q = \dfrac{۸ \times ۳}{۲} = ۱۲ \\ q = \dfrac{n(n-۱)}{۲} \Rightarrow q = \dfrac{۸ \times ۷}{۲} = ۲۸ \end{cases} \Rightarrow ۲۸ - ۱۲ = ۱۶$$

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته خرداد ۱۴۰۲

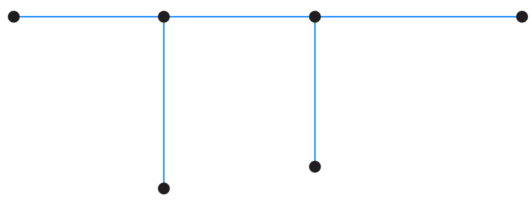
پاسخ سؤالات ۳۹ تا ۴۰

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته خرداد ۱۴۰۲

۳۹ نادرست

۴۰ نادرست

۴۱



امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته خرداد ۱۳۹۸

۴۲

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته خرداد ۱۳۹۸

الف $\{v_{۱}, v_{۳}, v_{۴}, v_{۵}\}$

ب $\gamma(G) = ۳$

پ $\{v_{۱}, v_{۳}, v_{۵}\} \quad , \quad \{v_{۲}, v_{۴}, v_{۶}\}$

۴۳

$A = \{h, g, f, i, j\}$

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته خرداد ۱۳۹۸

پاسخ سؤالات ۴۴ تا ۴۷

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته خرداد ۱۳۹۹

۴۴ دو برابر

۴۵ k

۴۶ مینیمم

۴۷ مینیمال

۴۸ طبق قضیه داریم $\left\lceil \frac{۱۰}{۴+۱} \right\rceil = ۲ \leq \gamma(G)$. ازطرفی مجموعهٔ $D = \{e, j\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر است. لذا $\gamma(G) \leq ۲$، بنابراین $\gamma(G) = ۲$.

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته خرداد ۱۴۰۰

۴۹ یک مجموعه احاطه‌گر را که با حذف هر یک از رئوس آن دیگر احاطه‌گر نباشد را احاطه‌گر مینیمال می‌نامیم.

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته خرداد ۱۴۰۱

۵۰

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته خرداد ۱۳۹۹

الف $N_G[a] = \{a, b, e, d\}$

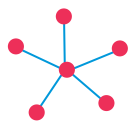
ب دور به طول ۴: a, b, e, d, a

پ مسیر به طول ۳: a, e, b, c و مسیر به طول ۴: a, d, e, b, c

پاسخ سؤالات ۵۱ تا ۵۲

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته خرداد ۱۴۰۰

۵۱



۵۲

۵۳ برای احاطه کردن رئوس a، b، c، d و g حداقل دو تا از آن‌ها باید در مجموعه احاطه‌گر باشند، زیرا $۲ = \left\lceil \frac{۵}{۳+۱} \right\rceil$ برای احاطه کردن رئوس e، f و h حداقل یکی از آن‌ها باید انتخاب شوند، زیرا $۱ = \left\lceil \frac{۳}{۳+۱} \right\rceil$ بنابراین حداقل سه رأس باید در مجموعه احاطه‌گری از گراف باشد یعنی $\gamma(G) \geq ۳$
ازطرفی مجموعه $D = \{a , c , e\}$ یک مجموعه احاطه‌گر است. لذا $\gamma(G) \leq ۳$ بنابراین: $\gamma(G) = ۳$

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته خرداد ۱۴۰۱

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته دی ۱۴۰۱

۵۴

الف $\delta(G) = ۰ , \Delta(G) = ۳$

ب $bcedb$

پ $bcde$ یا $bdec$ یا $bced$ یا $bdce$

ت $N_G(f) = \{g\}$

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته دی ۱۳۹۹

۵۵

الف ۳

ب (b, d, c, b) و (a, b, c, a) و (a, b, d, c, a)

پ ۴

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته دی ۱۳۹۹

۵۶ رئوس

۵۷ طوقه

۵۸ مجاور

۵۹ زوج

۶۰ گرافی از مرتبهٔ n که درجهٔ تمام رئوس آن باهم مساوی و برابر با عدد k ، $(0 \leq k < n)$ باشد.

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته دی ۱۳۹۸

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته دی ۱۳۹۸

۶۱

الف مجموعهٔ احاطه‌گر با ۴ عضو مانند: $\{c, f, h, g\}$

ب احاطه‌گر مینیمال مانند: $\{c, f, g\}$

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته دی ۱۳۹۷

۶۲

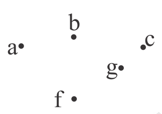
الف $(0/25)$ abgc

ب $(0/25)$ bcdgb

پ $(0/25)$ $\deg_G(a) = 5$

ت خیر چون مثلاً از f به a مسیری وجود ندارد. $(0/5)$

ث $(0/25)$ نمره



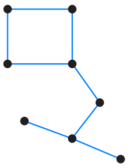
امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته دی ۱۳۹۸

۶۳

الف برای مثال اگر $n = 10$، رسم C_{10} یا P_{10}. در این گراف‌ها:

$$\gamma(G) = \left\lceil \frac{n}{\Delta + 1} \right\rceil = 4$$

ب در گرافی مشابه



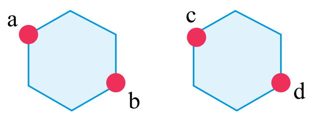
$\left\lceil \frac{n}{\Delta+۱} \right\rceil = ۲$ ولی $\gamma(G) = ۳$ است.

پاسخ سؤال ۶۴

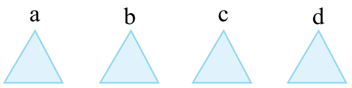
امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته دی ۱۳۹۸

۶۴ نادرست

۶۵



شکل دیگر با ویژگی‌های گفته‌شده می‌تواند شکل زیر باشد:



امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته دی ۱۴۰۱

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته دی ۱۳۹۹

۶۶

الف $\{۱, ۶, ۴\}$ یا $\{۱, ۵, ۷\}$

ب $\left\lceil \frac{۷}{۴+۱} \right\rceil = ۲$ بنابراین $\gamma(G) \geq ۲$ (*). از سوی دیگر $\{۲, ۵\}$ یک مجموعه احاطه‌گر است، لذا $\gamma(G) \leq ۲$ (**). از (*) و (**) نتیجه می‌شود که $\gamma(G) = ۲$.

۶۷ روش اول: می‌دانیم $\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{n}{\Delta+۱} \right\rceil$ پس داریم $\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{۶}{۵} \right\rceil$ بنابراین $\gamma(G) \geq ۲$ و باتوجه‌به $\{a, d\}$ داریم $\gamma(G) \leq ۲$ و لذا $\gamma(G) = ۲$.

روش دوم: این گراف با مجموعهٔ دو عضوی $\{a, d\}$ احاطه می‌شود. پس عدد احاطه‌گری این گراف کوچک‌تر یا مساوی ۲ است یعنی $\gamma(G) \leq ۲$. اما اگر $\gamma(G) = ۱$ یعنی گراف یک رأس دارد که تمام رئوس را احاطه می‌کند یعنی رأسی از درجهٔ ۵ باید در گراف وجود داشته باشد که چنین رأسی وجود ندارد و لذا $\gamma(G) > ۱$ بنابراین $۱ < \gamma(G) \leq ۲$ و لذا $\gamma(G) = ۲$.

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته دی ۱۴۰۱

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته دی ۱۳۹۸

۶۸

الف $\delta(G) = ۱$

ب $q = ۶$

پ $N_G[b] = \{b, a, c, d\}$

ت $x = c$

۶۹ فرض کنیم G یک گراف و A مجموعهٔ همهٔ رئوس فرد گراف G و B مجموعهٔ همهٔ رئوس زوج گراف G باشد. در این صورت داریم:

$$\sum_{v\in V(G)} \deg(v) = \sum_{v\in A} \deg(v) + \sum_{v\in B} \deg(v)$$

از طرفی می‌دانیم که مجموع درجات رئوس یک گراف G عددی زوج است؛ یعنی $\sum_{v\in V(G)} \deg(v)$ عددی زوج است و همچنین می‌دانیم $\sum_{v\in B} \deg(v)$ نیز عددی زوج است، بنابراین تفاضل آن‌ها نیز زوج خواهد شد.

پس $\sum_{v\in A} \deg(v)$ زوج است و در صورتی مجموع عددهای فرد زوج می‌شود که تعداد آن‌ها زوج باشد، درنتیجه $n(A)$ عددی زوج است.

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته دی ۱۳۹۷

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته خرداد ۱۳۹۹

۷۰ نکته: در گراف کامل داریم: $q_{K_p} = \binom{p}{۲} = \frac{p(p-۱)}{۲}$

$$q(K_p) = \frac{p(p-۱)}{۲} \quad (۰/۲۵) \Rightarrow \frac{p(p-۱)}{۲} = ۳۶ \quad (۰/۲۵)$$
$$\Rightarrow p = ۹ \quad (۰/۲۵), \quad \Delta(G) = p - ۱ = ۸ \quad (۰/۲۵)$$

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته دی ۱۳۹۷

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته دی ۱۳۹۷

۷۱

الف $(۰/۵)\ N_G(d) = \{b, e\}$

ب $(۰/۲۵)\ q = ۶$

پ مجموع درجات رئوس $= ۱۲\ (۰/۲۵)$

پاسخ سؤالات ۷۲ تا ۷۳

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته دی ۱۴۰۱

۷۲ مینیمال

۷۳ ۲۱

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته دی ۱۴۰۰

۷۴

الف نادرست

ب نادرست

پ درست

ت درست

۱

فصل تولد =لانه $= ۴$ (۰/۲۵) و افراد خانواده =کبوتر $= ۵$ (۰/۲۵). طبق اصل لانه کبوتری (۰/۲۵) حداقل یک لانه (فصل) وجود دارد که ۲ کبوتر (دو نفر از اعضای خانواده) در آن قرار می‌گیرند (در یک فصل به دنیا آمده‌اند) (۰/۲۵).

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته شهریور ۱۳۹۹

۲

$$y_۱ = x_۱ - ۱ \geq ۰ \Rightarrow x_۱ = ۱ + y_۱ \ (۰/۲۵) \ , \ y_۳ = x_۳ - ۴ \geq ۰ \Rightarrow x_۳ = ۴ + y_۳ \ (۰/۲۵) \Rightarrow$$
$$۱ + y_۱ + x_۲ + ۴ + y_۳ + x_۴ + x_۵ = ۱۴ \ (۰/۲۵) \Rightarrow y_۱ + x_۲ + y_۳ + x_۴ + x_۵ = ۹ \ (۰/۲۵)$$
$$\Rightarrow \text{جواب} = \binom{۹ + ۵ - ۱}{۵ - ۱} = \binom{۱۳}{۴} \ (۰/۲۵)$$

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته شهریور ۱۳۹۹

۳

فرض کنید A و B دو مربع لاتین هم‌مرتبه باشند به‌طوری‌که از کنار هم قرار دادن درایه‌های نظیر از این دو مربع، مربع جدیدی از همان مرتبه حاصل شود که هر خانهٔ آن حاوی یک عدد دو رقمی است که تمام رقم‌های سمت چپ مربوط به مربع A و تمام رقم‌های سمت راست مربوط به مربع B (و یا برعکس) است. در این صورت گوییم دو مربع لاتین A و B متعامدند، هرگاه هیچ‌یک از اعداد دو رقمی موجود در خانه‌های مربع جدید تکرار نشده باشند.

۳	۱	۲
۲	۳	۱
۱	۲	۳

۲	۳	۱
۳	۱	۲
۱	۲	۳

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته شهریور ۱۴۰۲

۴

$$|\bar{A}_۱ \cap \bar{A}_۲| = |\overline{A_۱ \cup A_۲}| = |S| - |A_۱| - |A_۲| + |A_۱ \cap A_۲| = ۳۵۰ - \left[\frac{۳۵۰}{۴}\right] - \left[\frac{۳۵۰}{۶}\right] + \left[\frac{۳۵۰}{۱۲}\right] = ۲۳۴$$

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته شهریور ۱۳۹۸

۵

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته شهریور ۱۳۹۸

الف $۴! \times ۶!$

ب $۵! \times ۴!$

پ $۳! \times ۷!$

۶

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته شهریور ۱۴۰۰

الف

$$۶! \times ۲!$$

ب

$$۲! \times ۵!$$

۷ راه‌حل اول:

$$\frac{۸!}{۳! \times ۴!} \quad (۰/۷۵)$$

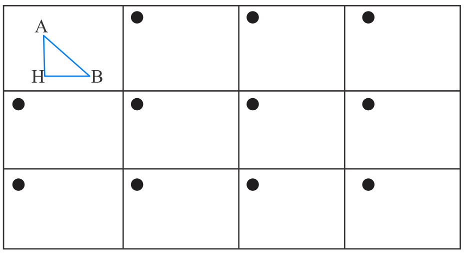
راه‌حل دوم:

$$\underbrace{\binom{۸}{۴}}_{(۰/۲۵)}\underbrace{\binom{۴}{۳}}_{(۰/۲۵)}\underbrace{\binom{۱}{۱}}_{(۰/۲۵)}$$

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته شهریور ۱۳۹۹

۸ تعداد لانه‌ها: ۱۲ مربع مانند شکل

تعداد کبوترها: ۱۳ نقطه



طبق اصل لانه‌کبوتری دو نقطه مانند A و B در یک لانه جای می‌گیرند. پس:

$$\begin{cases} AH < ۲ \\ BH < ۲ \end{cases} \Rightarrow AH^۲ + BH^۲ < ۸ \Rightarrow AB^۲ < ۸ \Rightarrow AB < \sqrt{۸}$$

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته شهریور ۱۳۹۸

۹ دو مربع لاتین زیر متعامدند، چون در مربع ترکیبی عدد تکراری نداریم.

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

۳	۱	۲
۲	۳	۱
۱	۲	۳

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته شهریور ۱۴۰۱

۱۰

$$x_۱ + x_۳ + x_۴ = ۸$$

$$x_۴ - ۳ = y_۴ \Rightarrow x_۱ + x_۳ + y_۴ = ۵ \Rightarrow \text{تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی} : \binom{۷}{۲} = ۲۱$$

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته شهریور ۱۴۰۲

۱۱ در مربع لاتین زیر، اعداد ۲ رقمی تکراری نداریم. پس دو مربع لاتین، متعامدند $(۰/۲۵)$.
رسم مربع لاتین $(۰/۷۵)$

۱۱	۲۲	۳۳
۳۲	۱۳	۲۱
۲۳	۳۱	۱۲

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته شهریور ۱۳۹۹

۱۲ اگر فرض کنیم $A = \{a_۱, a_۲, a_۳, a_۴, a_۵\}$ و $B = \{b_۱, b_۲, b_۳, ..., b_۷\}$، برای تعریف f روی هر عضو A، ۷ انتخاب داریم، بنابراین طبق اصل ضرب تعداد تابع‌های یک‌به‌یک برابر است با: $\frac{۷!}{۲!} = ۷ \times ۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳$
توجه: اگر از فرمول $\frac{۷!}{۲!} = (۷)_۵$ پاسخ دهید، درست است.

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته شهریور ۱۴۰۱

۱۳

$$y_۱ = x_۱ - ۳, y_۱ \geq ۰ \quad , \quad y_۴ = x_۴ - ۴, y_۴ \geq ۰$$
$$y_۱ + ۳ + x_۲ + x_۳ + y_۴ + ۴ + x_۵ = ۱۵$$
$$\Rightarrow y_۱ + x_۲ + x_۳ + y_۴ + x_۵ = ۸ \Rightarrow \text{جواب} = \binom{۱۲}{۴}$$

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته شهریور ۱۴۰۰

۱۴ A: تعداد اعداد بخش‌پذیر بر ۵
B: تعداد اعداد بخش‌پذیر بر ۴

$$|A| = [\frac{۵۰۰}{۵}] = ۱۰۰\,,\ |B| = [\frac{۵۰۰}{۴}] = ۱۲۵\,,\ |A \cap B| = [\frac{۵۰۰}{۲۰}] = ۲۵$$
$$|\overline{A} \cap \overline{B}| = |\overline{A \cup B}| = ۵۰۰ - (۱۰۰ + ۱۲۵ - ۲۵) = ۳۰۰$$

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته شهریور ۱۴۰۲

۱۵

۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳
۳	۴	۱	۲
۲	۳	۴	۱

رسم مربع لاتین $(۰/۵)$

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته شهریور ۱۳۹۹

۱۶

$$A=\{۱\leq n\leq ۲۰۰|n=۴k\}\Rightarrow |A|=\left[\frac{۲۰۰}{۴}\right]=۵۰$$
$$B=\{۱\leq n\leq ۲۰۰|n=۷k\}$$
$$A\cap B=\{۱\leq n\leq ۲۰۰|n=۲۸k\}\Rightarrow |A\cap B|=\left[\frac{۲۰۰}{۲۸}\right]=۷$$
$$|A\cap B'|=|A|-|A\cap B|=۵۰-۷=۴۳$$

کتاب درسی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته تمرین

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته شهریور ۱۴۰۰

۱۷

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته شهریور ۱۴۰۰

الف دو نوع مربع لاتین مرتبهٔ ۲ داریم.

۱	۲
۲	۱

۲	۱
۱	۲

ب

۱۲	۲۱
۲۱	۱۲

متعامد نیستند، زیرا در مربع بالا عدد دورقمی تکراری داریم.

۱۸ راه‌حل اول:

$$A=\{a_۱,a_۲,a_۳\}\ ,\ b=\{b_۱,b_۲,...,b_۶\}$$
$$f(a_۱)=b_۱\vee b_۲\vee ...\vee b_۶\Rightarrow \text{به ۶ طریق } f(a_۱) \text{ را تعریف کنیم}\ (۰/۲۵)$$
$$\text{یک به یک } f\Rightarrow f(a_۲)=f(a_۱)\Rightarrow \text{به ۵ طریق } f(a_۲) \text{ را تعریف کنیم}\ (۰/۲۵)$$
$$\text{یک به یک } f\Rightarrow f(a_۳)=f(a_۱),f(a_۳)=f(a_۲)\Rightarrow \text{به ۴ طریق } f(a_۳) \text{ را تعریف کنیم}\ (۰/۲۵)$$

بنابراین طبق اصل ضرب $۶\times ۵\times ۴=۱۲۰$ تابع یک به یک داریم (۰/۲۵).

راه‌حل دوم:

$$P(۶,۳)=\frac{۶!}{۳!}=۱۲۰$$

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته شهریور ۱۳۹۹

۱۹ حل مسأله معادل با یافتن تعداد تابع‌های ممکن از یک مجموعهٔ ۴ عضوی به یک مجموعهٔ ۸ عضوی است (۰/۵) که برابر با $۸^۴$ است (۰/۵).

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته شهریور ۱۳۹۹

۲۰

خ، خ، خ، ب، ب، ب، ب

$$۳!\times ۴!\times ۲!=۲۸۸$$

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته شهریور ۱۴۰۲

۲۱ راه‌حل اول: $\binom{۵}{۵}\binom{۱۰}{۵}\binom{۱۵}{۵}\binom{۲۰}{۵}$

راه‌حل دوم: $\frac{۲۰!}{۵! \times ۵! \times ۵! \times ۵!}$

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته شهریور ۱۴۰۰

۲۲

$$k + ۱ = ۲۰ \Rightarrow k = ۱۹, kn + ۱ = ۱۹ \times ۷ + ۱ = ۱۳۴$$

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته شهریور ۱۴۰۰

پاسخ سؤال ۲۳

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته شهریور ۱۳۹۸

۲۳ به ترتیب متن سؤال n و $(k+۱)$.

۲۴

$$x_۱ + ۴x_۲ + x_۳ + x_۴ + ۲ = ۹ \Rightarrow x_۱ + ۴x_۲ + x_۳ + x_۴ = ۷$$

$$\left.\begin{array}{l} x_۲ = ۰ \Rightarrow x_۱ + x_۳ + x_۴ = ۷ \Rightarrow \binom{۹}{۲} = ۳۶ \\ x_۲ = ۱ \Rightarrow x_۱ + x_۳ + x_۴ = ۳ \Rightarrow \binom{۵}{۲} = ۱۰ \end{array}\right\} \Rightarrow ۳۶ + ۱۰ = ۴۶$$

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته شهریور ۱۴۰۱

۲۵

$$x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ + x_۵ + x_۶ = ۱۲ \Rightarrow y_۱ + ۳ + x_۲ + x_۳ + x_۴ + y_۵ + ۴ + x_۶ = ۱۲$$

$$y_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ + y_۵ + x_۶ = ۵ \xrightarrow{\binom{n+k-۱}{k-۱}} \binom{۵+۶-۱}{۶-۱} = ۲۵۲$$

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته شهریور ۱۳۹۸

۲۶

$$k + ۱ = ۳ \Rightarrow k = ۲\,,\, n = ۳ \times ۴ = ۱۲ \Rightarrow kn + ۱ = ۱۲ \times ۲ + ۱ = ۲۵$$

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته شهریور ۱۴۰۲

۲۷

۴	۳	۲	۱	
$T_۴$	$T_۳$	$T_۲$	$T_۱$	$C_۱$
$T_۳$	$T_۲$	$T_۱$	$T_۴$	$C_۲$
$T_۲$	$T_۱$	$T_۴$	$T_۳$	$C_۳$
$T_۱$	$T_۴$	$T_۳$	$T_۲$	$C_۴$

این جدول یکی از پاسخ‌های ممکن است.

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته شهریور ۱۳۹۸

۲۸

$$\frac{۸!}{۴! \times ۳! \times ۱!}$$

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته شهریور ۱۴۰۲

۲۹ ۴ دانش‌آموز پایهٔ دوازدهم و ۶ دانش‌آموز پایهٔ یازدهم را به چند طریق می‌توان در یک ردیف (کنار هم) قرار داد به‌طوری‌که همواره دانش‌آموزان پایهٔ دوازدهم کنار هم باشند؟

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته شهریور ۱۴۰۱

۳۰ اگر مجموعهٔ کسانی را که فوتبال بازی می‌کنند با F و کسانی را که والیبال بازی می‌کنند با V نشان دهیم، خواهیم داشت:

$$\underbrace{\left|\overline{F \cup V}\right| = |S| - |F \cup V|}_{(۰/۲۵)} = ۲۵ - \underbrace{(۱۵ + ۱۴ - ۹)}_{(۰/۵)} = ۵ \ \ (۰/۲۵)$$

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته شهریور ۱۳۹۹

۳۱

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته خرداد ۱۳۹۹

الف متعامدند، زیرا عدد دورقمی تکراری در مربع وجود ندارد.

۳۲	۲۱	۱۳
۱۱	۳۳	۲۲
۲۳	۱۲	۳۱

ب متعامد نیستند، زیرا عدد دورقمی تکراری در مربع وجود دارد.

۱۳	۲۱	۳۲
۳۲	۱۳	۲۱
۲۱	۳۲	۱۳

پاسخ سؤالات ۳۲ تا ۳۳

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته خرداد ۱۴۰۲

۳۲ ۴

۳۳

$$\frac{۵!}{۲!} = ۶۰$$

پاسخ سؤالات ۳۴ تا ۳۵

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته خرداد ۱۴۰۰

۳۴

$$۳^۴ - (۳ \times ۲^۴ - ۳) = ۳۶$$

۳۵

$$\frac{۸!}{۴!} = ۱۶۸۰$$

۳۶

$$x_۳ = ۴ \, , \, x_۵ \geq ۳ \Rightarrow x_۵ = y_۵ + ۳$$
$$x_۱ + x_۲ + ۴ + x_۴ + ۳ + y_۵ + x_۶ = ۱۲$$
$$\Rightarrow x_۱ + x_۲ + x_۴ + y_۵ + x_۶ = ۵ \Rightarrow \text{جمع} = \binom{۹}{۴}$$

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته خرداد ۱۴۰۱

۳۷

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته خرداد ۱۴۰۰

الف

$$۶! \times ۲!$$

ب

$$۲! \times ۷!$$

پاسخ سؤال ۳۸

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته خرداد ۱۳۹۸

۳۸ ۱۵

۳۹

$$P = \frac{۹!}{۳! \times ۲! \times ۲!} \Rightarrow P = ۳ \times ۷!$$

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته خرداد ۱۳۹۸

۴۰

$$x_۱ + \ldots + x_۵ = ۱۱ \quad ; x_۲ \geq ۲ \, , \, x_۵ \geq ۴$$
$$x_۱ + y_۲ + ۲ + x_۳ + x_۴ + y_۵ + ۴ = ۱۱ \Rightarrow x_۱ + y_۲ + x_۳ + x_۴ + y_۵ = ۵$$
$$\Rightarrow \text{جواب} = \binom{۵+۵-۱}{۵-۱} = \binom{۹}{۴}$$

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته خرداد ۱۳۹۹

۴۱

تعداد لانه‌ها: $۷ \times ۱۲ = ۸۴$

تعداد کبوترها: ۵۰۵ دانش‌آموز

$$\begin{array}{r|l} ۵۰۵ & ۸۴ \\ \underline{-\ ۵۰۴} & \overline{۶} \\ ۱ & \end{array} \Rightarrow ۶ + ۱ = ۷$$

طبق اصل لانه‌کبوتری لااقل ۷ نفر آن‌ها روز هفته و ماه تولدشان یکسان است.

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته خرداد ۱۳۹۸

۴۲

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$n(A \cup B) = \left[\frac{۹۰}{۲}\right] + \left[\frac{۹۰}{۳}\right] - \left[\frac{۹۰}{۶}\right] \Rightarrow n(A \cup B) = ۶۰$$

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته خرداد ۱۳۹۸

۴۳

متعامد نیستند. زیرا در مربع آخر عدد دو رقمی تکراری داریم.

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

$\Rightarrow$ B =

۱	۳	۲
۲	۱	۳
۳	۲	۱

$\Rightarrow$

۲۱	۳۳	۱۲
۱۲	۲۱	۳۳
۳۳	۱۲	۲۱

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته خرداد ۱۴۰۰

۴۴

با استفاده از جایگشت $۱ \to ۴, ۴ \to ۳, ۳ \to ۲, ۲ \to ۱$ مربع لاتین به‌صورت زیر داریم:

۳	۲	۱	۴
۱	۴	۳	۲
۴	۱	۲	۳
۲	۳	۴	۱

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته خرداد ۱۳۹۹

۴۵

$$\frac{۷!}{۲! \times ۳!} = ۴۲۰$$

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته خرداد ۱۳۹۹

۴۶

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته خرداد ۱۳۹۹

الف

$۴! \times ۳!$

ب

$۴! \times ۴!$

۴۷

تعداد حالت‌های ممکن برای انجام این کار معادل است با پیدا کردن تعداد تابع‌های یک‌به‌یک از مجموعهٔ ۴ عضوی به مجموعه‌ای ۸ عضوی، یعنی:

$$(۸)_۴ = \frac{۸!}{۴!} = ۱۶۸۰$$

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته خرداد ۱۳۹۹

۴۸

$$\begin{cases} x_۴ = ۰ \Rightarrow x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۱۰ \Rightarrow \binom{۱۲}{۲} = ۶۶ \\ x_۴ = ۱ \Rightarrow x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۸ \Rightarrow \binom{۱۰}{۲} = ۴۵ \end{cases} \Rightarrow ۶۶ + ۴۵ = ۱۱۱$$

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته خرداد ۱۴۰۲

۴۹

	a	b	c
شنبه	۱	۲	۳
یکشنبه	۳	۱	۲
دوشنبه	۲	۳	۱

و

	a	b	c
شنبه	۱	۳	۲
یکشنبه	۳	۲	۱
دوشنبه	۲	۱	۳

$\Rightarrow$

	a	b	c
شنبه	۱۱	۲۳	۳۲
یکشنبه	۳۳	۱۲	۲۱
دوشنبه	۲۲	۳۱	۱۳

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته خرداد ۱۴۰۲

۵۰

تعداد کبوترها $= ۵۰۵$

تعداد لانه‌ها $=$ تعداد روزهای هفته $\times$ تعداد ماه‌های سال

$$n = ۷ \times ۱۲ = ۸۴$$

طبق تعمیم اصل لانه کبوتری:

$$\text{تعداد کبوترها} = kn + ۱ \xrightarrow{n=۸۴} ۵۰۵ = k \times ۸۴ + ۱ \Rightarrow k = ۶ \Rightarrow k + ۱ = ۷$$

در این صورت لانه‌ای وجود دارد که لااقل ۷ کبوتر در آن قرار می‌گیرند. یعنی حداقل ۷ نفر از دانش آموزان روز هفته و ماه تولدشان یکسان است.

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته خرداد ۱۴۰۱

۵۱

برای برنامه‌ریزی دو مربع لاتین متعامد در نظر بگیریم. مربع A مربوط به ماشین‌ها و مربع B مشخص‌کنندهٔ الیاف است.

A =

	$W_۱$	$W_۲$	$W_۳$
روز اول	۱	۳	۲
روز دوم	۳	۲	۱
روز سوم	۲	۱	۳

B =

	$W_۱$	$W_۲$	$W_۳$
روز اول	۲	۱	۳
روز دوم	۳	۲	۱
روز سوم	۱	۳	۲

$\Rightarrow$

	$W_۱$	$W_۲$	$W_۳$
روز اول	۱۲	۳۱	۲۳
روز دوم	۳۳	۲۲	۱۱
روز سوم	۲۱	۱۳	۳۲

در مربع سمت راست، عدد سمت چپ هر درایه نشان‌دهندهٔ ماشین و عدد سمت راست آن مشخص‌کنندهٔ نوع الیاف است.

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته خرداد ۱۳۹۹

۵۲

$$k + ۱ = ۵ \Rightarrow k = ۴ \quad , \quad kn + ۱ = ۵۴ \Rightarrow ۴n = ۵۳ \quad , \quad n = \left[\frac{۵۳}{۴}\right] = ۱۳$$

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته خرداد ۱۴۰۰

۵۳

$$|F| = ۱۵ \ , \ |V| = ۱۱ \ , \ |B| = ۹ \ ,$$

$$|F \cap V| = ۵ \ , \ |B \cap V| = ۶ \ , \ |F \cap B| = ۳ \ , \ |F \cap B \cap V| = ۳$$

$$\text{فقط فوتبال بازی کنند} = |F| - |F \cap V| - |F \cap B| + |F \cap B \cap V|$$

$$= ۱۵ - ۵ - ۳ + ۳ = ۱۰$$

$$\text{فقط والیبال بازی کنند} = |V| - |F \cap V| - |V \cap B| + |F \cap B \cap V|$$

$$= ۱۱ - ۵ - ۶ + ۳ = ۳$$

$$\text{فقط بسکتبال بازی کنند} = |B| - |F \cap B| - |V \cap B| + |F \cap B \cap V|$$

$$= ۹ - ۳ - ۶ + ۳ = ۳$$

$$\Rightarrow ۱۰ + ۳ + ۳ = ۱۶$$

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته خرداد ۱۴۰۰

۵۴

$$\binom{۳}{۲} \times \binom{۶}{۴} \times ۶!$$

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته خرداد ۱۴۰۲

۵۵

$$x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ + x_۵ = ۱۰ \Rightarrow x_۱ + y_۲ + ۱ + y_۳ + ۱ + y_۴ + ۱ + y_۵ + ۱ = ۱۰$$

$$x_۱ + y_۲ + y_۳ + y_۴ + y_۵ = ۶ \xrightarrow{\binom{n+k-۱}{k-۱}} \binom{۶+۵-۱}{۵-۱}$$

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته خرداد ۱۳۹۸

۵۶ در این مسئله $k + ۱ = ۷ \Rightarrow k = ۶$ و تعداد لانه‌ها ۱۲ است. پس تعداد کبوترها یا معادل با آن تعداد دانش‌آموزان حداقل می‌بایست $kn + ۱ = ۶ \times ۱۲ + ۱ = ۷۳$ باشد.

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته خرداد ۱۳۹۹

۵۷

$$x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ + x_۵ + x_۶ = ۱۲ \quad , \quad x_۱ \geq ۱ \ , \ x_۴ \geq ۴ \ , \ x_۶ = ۱$$

$$y_۱ = x_۱ - ۱ \ , \ y_۱ \geq ۰ \ , \ y_۴ = x_۴ - ۴ \ , \ y_۴ \geq ۰$$

$$y_۱ + ۱ + x_۲ + x_۳ + y_۴ + ۴ + x_۵ + ۱ = ۱۲ \quad \Rightarrow \quad y_۱ + x_۲ + x_۳ + y_۴ + x_۵ = ۶$$

$$\Rightarrow \quad \text{ج} = \binom{۱۰}{۴}$$

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته خرداد ۱۴۰۰

۵۸

$$\underset{(۰/۲۵)}{\binom{۴}{۲}} \times \underset{(۰/۲۵)}{\binom{۵}{۳}} \times \underset{(۰/۲۵)}{۵!} = ۷۲۰۰ \quad (۰/۲۵)$$

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته دی ۱۳۹۷

۵۹

$$6! \times 3!$$

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته دی ۱۴۰۰

۶۰

$$A = \{n \in S | n = 5k \ , \ n \in \mathbb{Z}\} \ \Rightarrow \ n(A) = \left[\frac{400}{5}\right] = 80$$

$$B = \{n \in S | n = 7k, n \in \mathbb{Z}\} \Rightarrow n(A) = \left[\frac{400}{7}\right] = 57$$

$$A \cap B = \{n \in S | n = 35k, k \in \mathbb{Z}\} \Rightarrow n(A \cap B) = \left[\frac{400}{35}\right] = 11$$

$$|\overline{A \cup B}| = |S| - |A \cup B| = 400 - (80 + 57 - 11) = 274$$

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته دی ۱۳۹۹

۶۱

فرض کنیم هر سطر نشان‌دهندهٔ هر کلاس و اعداد ۱، ۲ و ۳ در مربع لاتین نمایانگر مدرس‌های حاضر در کلاس باشند. طبق مربع لاتین ۳ × ۳ زیر هر مدرس در هر جلسه در یک کلاس حاضر می‌شود و در هر کلاس دقیقاً یک جلسه تدریس دارد.

۳	۲	۱
۲	۱	۳
۱	۳	۲

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته دی ۱۴۰۱

۶۲

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 16 \quad x_3 = 3 \ , \ x_4 \geq 3 \ , \ x_5 \geq 5$$

$$\xrightarrow{x_3 = 3, x_4 = y_4 + 3, x_5 = y_5 + 5} x_1 + x_2 + 3 + y_4 + 3 + y_5 + 5 = 16$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 + y_4 + y_5 = 5 \quad x_i \geq 0, \ y_i \geq 0$$

$$\Rightarrow \binom{5 + 4 - 1}{4 - 1} = 56$$

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته دی ۱۴۰۱

۶۳

$$y_2 = x_2 - 3 \ , \ y_2 \geq 0 \ , \ x_5 = 2$$

$$x_1 + y_2 + 3 + x_3 + x_4 + 2 + x_6 = 17$$

$$\Rightarrow \ x_1 + y_2 + x_3 + x_4 + x_6 = 12$$

تعداد جواب‌ها $= \binom{16}{4}$

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته دی ۱۳۹۹

۶۴

$$k+1=20 \Rightarrow k=19 \quad (0/5)$$

طبق تعمیم اصل لانه‌کبوتری، تعداد لانه‌ها همان روزهای سال است: $n=365 \quad (0/5)$

بنابراین تعداد کبوترها برابر است با:

$$kn+1=365\times 19+1=6936 \quad (0/5)$$

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته دی ۱۳۹۷

۶۵

ابتدا مستطیل موردنظر را به ۶ مربع به ضلع ۲ تقسیم می‌کنیم و هر قسمت را یک لانه فرض می‌کنیم و هفت نقطه را هفت کبوتر در نظر می‌گیریم. طبق اصل لانه‌کبوتری دست‌کم یک لانه وجود دارد که شامل دو کبوتر است. باتوجه‌به قضیهٔ فیثاغورس داریم:

$$AB^2=AC^2+BC^2 \Rightarrow AB^2<2^2+2^2 \Rightarrow AB^2<8 \Rightarrow AB<\sqrt{8}$$

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته دی ۱۴۰۱

۶۶

تعداد حالت‌های ممکن برای انجام یک عمل معادل است با پیدا کردن تعداد تابع‌های پوشا از یک مجموعهٔ ۴ عضوی مانند A به یک مجموعهٔ ۳ عضوی مانند B.

$$A_i=\{f:A\rightarrow B \mid f(a_i)=b_j \;,\; i=1,2,3,4 \;,\; j=1,2,3\}\;(0/25)$$
$$|S|=|B|^{|A|}=3^4=81 \quad (0/25) \quad , \quad |A_1|=|A_2|=|A_3|=2^4=16 \quad (0/25)$$
$$|A_1\cap A_2|=|A_1\cap A_3|=|A_2\cap A_3|=1 \quad (0/25)\,, \quad |A_1\cap A_2\cap A_3|=0 \quad (0/25)$$
$$\left|\bar{A}_1\cap \bar{A}_2\cap \bar{A}_3\right| \underset{(0/25)}{=} \left|\overline{A_1\cup A_2\cup A_3}\right| = |S|-\underset{(0/25)}{|A_1\cup A_2\cup A_3|} = 81-\underset{(0/25)}{(3\times 16-3\times 1+0)} = 36$$

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته دی ۱۳۹۷

پاسخ سؤال ۶۷

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته دی ۱۳۹۸

۶۷

درست

۶۸

$$1\le j\le 3\,,\quad A_j=\{f:A\rightarrow B \mid f(a_i)=b_j \;,\; 1\le i\le 4\}$$
$$A=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}\,,B=\{b_1,b_2,b_3\}$$
$$|S|=3^4 \quad , \quad |A_i|=2^4, |A_i\cap A_j|=1^4 \quad , \quad |A_1\cap A_2\cap A_3|=0$$
$$\left|\overline{A_1\cup A_2\cup A_3}\right|=|S|-|A_1\cup A_2\cup A_3|=81-(3\times 16-3\times 1+0)=36$$

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته دی ۱۳۹۸

۶۹ متعامدند. زیرا در جدول ترکیب‌شده از دو مربع لاتین، عدد تکراری نداریم.

۱۱	۲۲	۳۳
۳۲	۱۳	۲۱
۲۳	۳۱	۱۲

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته دی ۱۳۹۸

۷۰

$$\text{تعداد لانه‌ها} = n = ۳۲ \times ۳۱ = ۹۹۲ \quad , \quad k + ۱ = ۳ \Rightarrow k = ۲$$

$$\text{تعداد کبوترها} = ۲ \times ۹۹۲ + ۱ = ۱۹۸۵$$

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته دی ۱۳۹۹

۷۱

$$|\overline{A \cup B}| = |S| - |A \cup B| = |S| - |A| - |B| + |A \cap B|$$
$$|S| = ۶۳۰ \; , \; |A| = ۲۱۰ \; , \; |B| = ۱۲۶ \; , \; |A \cap B| = ۴۲$$
$$\Rightarrow |\overline{A \cup B}| = ۳۳۶$$

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته دی ۱۴۰۱

۷۲

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته دی ۱۳۹۸

الف $۶! \times ۵!$

ب $۶! \times ۵! \times ۲!$

۷۳ برای اینکه مجموع دو عدد زوج باشد، هر دو عدد یا باید زوج باشند و یا هر دو فرد. بنابراین تعداد لانه‌ها برابر ۲ و تعداد کبوترها ۳ است. طبق اصل لانهٔ کبوتری حداقل یک لانه وجود دارد که دو کبوتر در آن قرار می‌گیرد؛ یعنی حداقل دو عدد طبیعی از بین سه عدد وجود دارد که مجموعشان زوج خواهد شد.

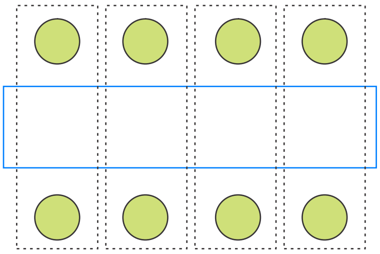
امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته دی ۱۴۰۰

۷۴

$$\frac{۸!}{۴! \times ۲!} = \frac{۸ \times ۷ \times ۶ \times ۵}{۲} = ۸۴۰$$

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته دی ۱۳۹۸

۷۵



چون می‌خواهیم برادرها روبه‌روی هم بنشینند، هر جفت برادر را در یک بسته (شیء) در نظر می‌گیریم. پس ۴ شیء متمایز خواهیم داشت که به $۴!$ جایگشت دارند.

حال در هریک از بسته‌ها (که دو برادر قرار دارند) برادرها می‌توانند با هم جابه‌جا شوند. پس هریک از بسته‌ها داخل خود $۲!$ جایگشت دارد.

بنابراین تعداد حالات مطلوب برابر است با:

$$۴! \times ۲! \times ۲! \times ۲! \times ۲! = ۴! \times (۲!)^{۴}$$

کتاب درسی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته تمرین

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته دی ۱۴۰۱

۷۶

$$\underset{(۰/۵)}{\begin{array}{|c|c|c|}\hline ۱ & ۳ & ۲ \\ \hline ۳ & ۲ & ۱ \\ \hline ۲ & ۱ & ۳ \\ \hline \end{array}} \quad \text{و} \quad \underset{(۰/۵)}{\begin{array}{|c|c|c|}\hline ۲ & ۱ & ۳ \\ \hline ۳ & ۲ & ۱ \\ \hline ۱ & ۳ & ۲ \\ \hline \end{array}} \longrightarrow \underset{(۰/۵)}{\begin{array}{|c|c|c|}\hline ۱۲ & ۳۱ & ۲۳ \\ \hline ۳۳ & ۲۲ & ۱۱ \\ \hline ۲۱ & ۱۳ & ۳۲ \\ \hline \end{array}}$$

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته دی ۱۳۹۷

۷۷

$$y_۱ + ۳ + x_۲ + y_۳ + ۴ + x_۴ + x_۵ = ۱۴ \Rightarrow y_۱ + x_۲ + y_۳ + x_۴ + x_۵ = ۷$$
$$\Rightarrow \binom{n+k-۱}{k-۱} = \binom{۱۱}{۴}$$

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته دی ۱۳۹۸

۷۸

تعداد کبوترها برابر با ۴۳ و تعداد لانه‌ها برابر با ۴۲ و به‌صورت زیر هستند:

$$\underbrace{\quad}_{۱,۸۴}, \underbrace{\quad}_{۲,۸۳}, \underbrace{\quad}_{۳,۸۲}, \dots, \underbrace{\quad}_{۴۲,۴۳}$$

چنانچه قرار باشد کبوترها لانه‌ها را اشغال کنند، آنگاه طبق اصل لانه کبوتری حداقل دو عدد وجود دارد که در یک لانه جای می‌گیرند و مجموعشان ۸۵ است.

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته دی ۱۳۹۸

پاسخ سؤال ۷۹

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته دی ۱۴۰۱

۷۹ درست

۸۰ امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته دی ۱۳۹۹

الف $۳! \times ۳!$

ب $۲! \times ۴!$

۸۱

$$A = \{۱ \leq n \leq ۳۰۰ | n = ۴k \ (k \in \mathbb{N})\} \Rightarrow |A| = \left[\frac{۳۰۰}{۴}\right] = ۷۵$$

$$B = \{۱ \leq n \leq ۳۰۰ | n = ۵k \ (k \in \mathbb{N})\}$$

$$A \cap B = \{۱ \leq n \leq ۳۰۰ | n = ۲۰k \ (k \in \mathbb{N})\} \Rightarrow |A \cap B| = \left[\frac{۳۰۰}{۲۰}\right] = ۱۵$$

$$|A \cap B'| = |A| - |A \cap B| = ۷۵ - ۱۵ = ۶۰$$

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته دی ۱۴۰۰

۸۲

$$x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ = ۸ \,(۰/۲۵) \quad x_i \geq ۱ \,,\ i = ۱,۲,۳,۴ \quad (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow \binom{۸-۱}{۴-۱} = \binom{۷}{۳} = ۳۵ \,(۰/۵)$$

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته دی ۱۳۹۷

۸۳ امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته دی ۱۳۹۹

الف

$۱ \to ۳ \quad ۲ \to ۱ \quad ۳ \to ۲$

B=

۱	۳	۲
۲	۱	۳
۳	۲	۱

ب

۲۱	۱۳	۳۲
۳۲	۲۱	۱۳
۱۳	۳۲	۲۱

متعامد نیستند. زیرا در مربع آخر، عدد دورقمی تکراری داریم.